

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
CENTRAL ECONOMICS AND MATHEMATICS INSTITUTE

РОССИЙСКАЯ  
АКАДЕМИЯ НАУК

RUSSIAN  
ACADEMY OF SCIENCES

## **АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Сборник статей  
Выпуск 9

МОСКВА  
2012

**Анализ и моделирование экономических процессов** / Сборник статей под ред. В.З. Беленького. Вып. 9. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 163 с. (Рус.)

Коллектив авторов: **В.В. Аевский, О.А. Андриюшкевич, В.З. Беленький, Т.А. Белкина, В.Г. Гребенников, А.А. Заславский, И.М. Денисова, Б.А. Ефимов, Л.Я. Клеппер, М.В. Норштейн, С.А. Смоляк, Н.А. Трофимова, В.М. Четвериков.**

Девятый выпуск ежегодного сборника включает, как и прежде, четыре тематических раздела: «Анализ реальных экономических процессов», «Модели финансовых и рыночных механизмов», «Динамические модели», «Дискуссии, заметки и письма». Всего представлено 9 статей.

**Analysis and Modeling of Economic Processes** / The Collection of Articles, ed. V.Z. Belenky. Issue 9. – Moscow, CEMI RAS, 2012. – 163 p. (Рус.)

The ninth issue of annual Collection of articles consists of four sections: «Analysis of actual economic processes», «Modeling of financial and market mechanisms», «Dynamic models», «Discussions, Notes and Letters». As a whole nine articles are presented.

Ответственный редактор: доктор физико-математических наук, проф. В.З. Беленький.

Рецензенты: доктор экономических наук, проф. О.Б. Брагинский;  
доктор экономических наук, проф. В.А. Волконский.

ISBN 978-5-8211-0619-3

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Центральный экономико-математических наук РАН, 2012 г.

## Содержание

От редактора .....	6
<b>Раздел 1. Анализ реальных экономических процессов</b>	
<b>Андрюшкевич О.А., Денисова И.М. Современное состояние национальных инновационных систем.....</b>	<b>7</b>
1. Особенности современного рынка наукоемкой продукции	
2. Развитие инновационной экономики и конкурентоспособность	
3. Национальные инновационные системы и государственная политика	
4. Оценка состояния российской инновационной системы	
<b>Трофимова Н.А. Социальный капитал: анализ определяющих его факторов .....</b>	<b>31</b>
1. Концепция социального капитала	
2. Определяющие факторы	
3. Методология исследования	
4. Экспериментальные расчеты, анализ результатов	
<b>Смоляк С.А. Оценка стоимости машин с учетом их ремонтов ..</b>	<b>47</b>
1. Постановка задачи	
2. Описание состояния машины	
3. Основное уравнение	
4. Модели устранимого и неустранимого износов	
5. Случай нулевой ставки дисконтирования	
6. Исходная информация для оценки	

## Раздел 2. Модели финансовых и рыночных механизмов

**Ефимов Б.А.** Формирование установок индивидов и равновесие по Нэшу бескоалиционных игр: стохастический подход..... 73

1. Установка, как стационарный случайный процесс
2. Равновесие по Нэшу в выпуклой игре, описывающей формирование установок в условиях стохастики

**Аевский В.В., Четвериков В.М.** Одно обобщение дискретной модели доходности "коротких" облигаций..... 79

1. Безарбитражность рынка бескупонных облигаций
2. Построение модели ценообразования
3. Наблюдаемые переменные и латентный параметр
4. Анализ процентных ставок "MosPrime"

## Раздел 3. Динамические модели

**Белкина Т.А., Норштейн М.В.** Структура оптимальной инвестиционной стратегии в динамической модели риска с диффузионным возмущением..... 103

1. Описание модели и постановка задачи
2. Асимптотика функции Беллмана при малых значениях капитала
3. Случай экспоненциального распределения размера требований

#### Раздел 4. Дискуссии, заметки и письма

##### **Беленький В.З., Гребенников В.Г.**

Некоторые методы ранжирования объектов  
по результатам их парных сравнений ..... 113

1. Исходная информация
2. Веса участников в основном варианте
3. Некоторые модификации основного варианта
4. Анализ экспериментальных расчетов, заключение

##### **Беленький В.З., Заславский А.А.**

Что мешает употреблению в языке теории вероятностей  
термина "условное событие" ..... 129

##### **Беленький В.З., Клеппер Л.Я.**

Задача оптимального покрытия плоской выпуклой области  
небольшим числом одинаковых кругов ..... 137

1. Предварительные соображения
2. Покрытие треугольника
3. Прямоугольник
4. Эллипс
5. Выпуклая фигура в общем случае

Лист аннотаций ..... 158

List of abstracts ..... 161

Об авторах ..... 163

## **От редактора**

Сборник обрел статус Ежегодника, издаваемого в ЦЭМИ РАН. В дополнение к печатному изданию, он в полном объеме вывешивается на сайте ЦЭМИ в электронной форме.

Как обычно, благодарю всех авторов за участие в Сборнике и желаю всем нам успехов в дальнейшей работе.

В.З.Беленький

## Раздел 1. Анализ реальных экономических процессов

О.А.Андрюшкевич, И.М.Денисова

### СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НАЦИОНАЛЬНЫХ ИННОВАЦИОННЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

Важнейшим следствием развития международного разделения труда является широкое вовлечение всех государств в систему мирохозяйственных связей. Повышение конкурентоспособности и обеспечение лидирующих позиций на международных рынках возможно лишь при условии перехода экономики на путь инновационного развития, сущность которого заключается в активизации инновационной деятельности по созданию, внедрению и широкому распространению новых продуктов, услуг и технологических процессов как главных факторов качественного роста объемов производства, занятости, инвестиций и внешнеторгового оборота. Создание и приобретение инноваций становится крупной системной проблемой для транснациональных корпораций, ведущих государств и регионов мира – выпуск пользующейся спросом конкурентоспособной продукции помогает им завоевывать новые международные рынки. В первую очередь это касается сферы высокотехнологических отраслей, развитие которых является определяющим для формирования национальных инновационных систем.

Развитие современной инновационно-технологической системы нашей страны происходит в русле общемировых тенденций. Сохраняя национальную специфику, Россия все больше вовлекается в глобальную инновационную систему, имеет с ней общие направления и факторы развития. Поэтому анализ особенностей формирования национальных инновационных систем наиболее развитых стран, включающий исследование факторов, определяющих их конкурентоспособность и инновационную активность, является важным этапом исследований, позволяющим при выработке национальной инновационной стратегии России более четко представлять существующие проблемы с внутренними инновационными ресурсами, а также возможности и потенциальные угрозы для их решения.

В работе обобщаются основные положения исследований в области оценивания инновационного развития национальной экономики – состояния рынка наукоемкой продукции, конкурентоспособности и инновационной ак-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-02-00271.

тивности развитых стран и построения их инновационных систем. Особое внимание уделяется вопросу формирования российской инновационно-технологической системы и определения стратегии ее развития.

## **1. Особенности современного рынка наукоемкой продукции**

Мировое инновационное развитие во многом определяется состоянием высокотехнологических отраслей, уровень и динамика развития которых в свою очередь стимулирует развитие смежных отраслей промышленности.

**1.1. Характеристики рынка наукоемких товаров.** Первоначально к высокотехнологичным относились новейшие сектора промышленности, имеющие высокую долю удельных расходов на НИОКР, и это соответствовало понятию «наукоемкие отрасли промышленности». В дальнейшем высокие технологии стали частью технологической базы практически всех отраслей промышленности, и термин «высокие технологии» начал трактоваться значительно шире – основными критериями выделения конкретной отрасли (в том числе непроизводственной) в категорию высокотехнологичных являются: (1) доля расходов на НИОКР в обороте или в стоимости условно-чистой продукции и/или (2) отношение числа занятых в сфере отраслевых НИОКР к численности всего занятого в этой отрасли персонала [1].

В 90-е г.г. за рубежом стали выделять также наукоемкие производства с технологиями высокого уровня (*high level*) и производства с ведущими наукоемкими технологиями (*leading edge*). Для обозначения ведущих технологий в отечественной литературе часто используется термин ключевые (или критические) технологии. К ключевым, согласно классификации Немецкого института экономических исследований (DIW), относятся технологии, при использовании которых доля расходов на НИОКР превышает 8,5% объема отгрузок продукции, а к технологиям высокого уровня – для которых этот показатель составляет 3,5-8,5%. В группу ключевых технологий, согласно стандартной международной торговой классификации, входят 16 наукоемких продуктов. Это – радиоактивные материалы, фармацевтическая продукция, оборудование для автоматизированной обработки информации, полупроводниковые устройства, телекоммуникационное оборудование, аэрокосмическая и медицинская техника и др. В группу технологий высокого уровня включен 41 вид продуктов (в том числе продукция автомобилестроения, машиностроения, электротехнической, химической промышленности и др.), рассчитанных на массового потребителя [1].

Однако многие ведущие исследовательские центры за рубежом при рассмотрении проблем рынка наукоемкой продукции не используют научно обоснованные критерии для выделения высокотехнологичных отраслей, определяя их номенклатуру произвольно. Так, Национальный научный фонд

США (National Science Foundation), выделяет две группы высокотехнологичных отраслей: (1) биотехнология, оптоэлектроника, телекоммуникации, электроника, компьютеры (в том числе производства, связанные с компьютеризацией), разработка новых материалов, аэрокосмическая промышленность (в этот перечень добавляется также производство вооружений и военной техники) и (2) программное обеспечение, электронные компоненты, средства автоматизации и др. В России перечень наукоемких, высокотехнологичных отраслей и производств был разработан на основе опыта наиболее развитых стран и включает большую часть отраслей машиностроения, химическую, микробиологическую и медицинскую промышленности [1].

**1.2. Особенности страновой специализации.** В процессе формирования единого мирового рынка наукоемких товаров и услуг за отдельными странами закрепляется определенная специализация, отражающая преимущественное развитие ключевых технологий или технологий высокого уровня в данной стране. Большой наукоемкий промышленный сектор имеют США, Франция, Великобритания, Германия, Япония.

Германия лидирует в технологиях высокого уровня – более 90% промышленных расходов на НИОКР приходится на автомобилестроение, машиностроение, электротехническую и химическую промышленности [1]. США, Франция, Великобритания и Япония концентрируют средства, выделяемые на НИОКР, в основном в ключевых технологиях – аэрокосмическая промышленность (США, Франция), производство электронных компонентов и техники связи (Франция, Япония), фармацевтика (Великобритания), информационные технологии (США, Япония). В Китае приоритетами в науке и технике являются информационно-технологические отрасли – крупномасштабные интегрированные сети, программное обеспечение и системы информационной безопасности; развиваются и другие наукоемкие отрасли промышленности.

В последние десятилетия (после 1990 г.) изменилась динамика и структура торговли наукоемкой продукцией. Самым крупным экспортером и импортером наукоемкой продукции по-прежнему остаются США, крупнейшими нетто-экспортерами, а, следовательно, и крупнейшими поставщиками технологий являются Япония и Германия. Причем, если США и Япония специализируются на экспорте ключевых технологий, то Германия – на технологиях высокого уровня. В целом же следует отметить, что если раньше группа ведущих экспортеров наукоемкой продукции оставалась более или менее постоянной, то с 90-х гг. ее состав начал постепенно размываться. Доля участия стран-лидеров стала сокращаться за счет расширения присутствия на рынке таких стран, как Корея, Финляндия, Швеция, Нидерланды, которые также

начали специализироваться на экспорте высокотехнологичной продукции и значительно увеличили свои расходы на НИОКР. Существенно изменилась структура мировой торговли наукоемкой продукцией – увеличилась доля наукоемкой продукции в мировом экспорте, причем это увеличение произошло в основном за счет ключевых технологий (табл.1).

*Таблица 1*  
*Источник: [1]*

Международная торговля наукоемкой продукцией\*

	Структура мировой торговли	
	1991	2000
Наукоемкая продукция (%)	47,9	55,3
В т.ч.		
Ключевые технологии	16,4	23,5
Технологии высокого уровня	31,4	31,9
Не наукоемкая продукция(%)	52,1	44,7
Продукция обрабатывающей промышленности (млрд. долл.)	2689	4561

\*Немецкий институт экономических исследований (DIW). – Берлин, 2003.

Быстро растущая международная торговля наукоемкой продукцией ведет к постоянному расширению трансферта технологий, который обеспечивает более высокий потенциал роста национальных экономик. Однако, несмотря на интернационализацию производства, снижение административных барьеров при передаче технологий, все более свободный перелив капитала между странами, технологический разрыв между узкой группой стран-лидеров и остальным миром сохраняется. Наиболее качественная часть наукоемкой продукции, производимая в странах ЕС, США и Японии, потребляется самими же странами-лидерами. Увеличение доли менее развитых стран в мировой торговле наукоемкой продукцией означает не столько их прорыв на уровень государств-лидеров, сколько формирование “массового” рынка наукоемкой продукции с суженным спектром качественных характеристик [2].

Наукоемкими рынками являются рынки продукции пятого и более высоких технологических укладов. Ядро пятого технологического уклада составляет электронная промышленность, вычислительная, оптиковолоконная техника, программное обеспечение, телекоммуникации, роботостроение, производство и переработка газа, информационные услуги. В настоящее время происходит промышленное освоение и шестого технологического уклада,

ядро которого включает наноэлектронику, генную инженерию, мультимедийные интерактивные системы, высокотемпературную сверхпроводимость, космическую технику, тонкую химию и т.д. [3]. Анализ, проведенный корпорацией RAND, позволил выделить 16 прикладных направлений развития технологий, соответствующих подъему шестой волны технологического развития, причем добиться успеха по всем этим направлениям имеют шансы лишь 7 из 29 рассмотренных стран (США, Канада, Германия, Южная Корея, Япония, Австралия, Израиль), по 12 направлениям – 4 страны (Китай, Индия, Польша, Россия). Причем ожидается, что Китай и Индия сделают шаг к сближению с лидерами. России же, к сожалению, как показывает данный анализ, грозит примыкание к группе менее развитых в технологическом отношении стран (Бразилия, Чили, Мексика, Турция) [4]. Таким образом, в условиях обостряющегося соперничества за лидерство в международной конкуренции в сфере перспективных технологий, для России становится особенно важным определить то направление, которое могло бы обеспечить ей успешное участие в этой борьбе.

**1.3. Инновационный аутсорсинг.** Для современного этапа развития международного разделения труда характерно формирование не только транснациональных производственных структур, но и единого мирового научно-технического пространства. В последнее время крупные западные корпорации все чаще перемещают свою научно-исследовательскую деятельность за рубеж, в развивающиеся страны. Процесс передачи зарубежным партнерам не только сборочных операций, но и разработки новых изделий получил название инновационного аутсорсинга. Специфика инновационного аутсорсинга заключается в необходимости четкого разграничения прав на объекты интеллектуальной собственности, создаваемые в результате инновационной деятельности. Использование инновационного аутсорсинга приводит к возникновению следующих эффектов [5]:

- Фокусирование собственных ресурсов корпорации на основных направлениях инновационной деятельности. Функции, связанные с проведением научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, могут делегироваться сторонним компаниям, предоставляющим услуги аутсорсинга в конкретной области. При использовании аутсорсинга может произойти перераспределение ресурсов в пользу приоритетных направлений инновационной деятельности.

– Снижение себестоимости передаваемых функций за счет узкой специализации компании-аутсорсера, которая обеспечивает качество функций за ту же цену в силу наличия конкуренции.

- Получение доступа к ресурсам, которые отсутствуют у компании (например, при необходимости проведения лабораторных испытаний и тестов).

– Доступ к новейшим технологиям. Компания-аутсорсер за счет эффекта “оптовых” продаж своих услуг имеет больше стимулов и возможностей для вложений в приобретение и освоение новых технологий работы, что в рамках неспециализирующейся на данном направлении компании может быть нерентабельно.

- Повышение надежности. Аутсорсинг предполагает выполнение компанией-аутсорсером многочисленных однотипных задач клиентов, что обеспечивает накопление практического опыта.

– Передача ответственности за выполнение конкретной функции. В какой-то мере это стратегия диверсификации риска между компанией и аутсорсером.

– Сокращение продолжительности инновационного цикла за счет привлечения сторонних ресурсов.

Самым весомым аргументом в пользу инновационного аутсорсинга остается ускоренный выход готового продукта на рынок. Своевременное появление продукта на рынке имеет для его успеха гораздо большее значение, чем снижение издержек на разработку и производство – при задержке выхода готового продукта на рынок даже на месяц или два затраты на разработку и производство компенсируются в несколько раз дольше.

Применение инновационного аутсорсинга может иметь и отрицательные последствия. Во-первых – это опасность взращивания и стимулирования своих завтрашних конкурентов. Действительно, когда фирма “Motorola” заключила контракт с “BenQ”, по которому этой тайваньской фирме поручалась разработка и выпуск под товарным знаком американских компаний миллионных партий новых образцов мобильных телефонов для продажи в США и Европе, “BenQ” стала реализовать эту продукцию на исключительно благоприятном китайском рынке под собственным товарным знаком; поэтому впоследствии контракт был расторгнут. Второй потенциальной угрозой инновационного аутсорсинга является возможность снижения мотивации инвестирования в новые технологии со стороны владельцев признанных популярных и пользующихся в настоящее время доверием корпораций – многие из них стали эти расходы сокращать, передавая в офшор перспективные проекты [6].

Мировой рынок услуг инновационного аутсорсинга быстро растет. Национальные инновационные системы на международном уровне интегрируются в глобальные инновационные сети. Так, на компанию Texas Instruments в 100 информационно-технологических фирмах работает несколько тысяч

человек в Индии, Франции, Германии и США. Компания General Electric только в Китае построила 27 лабораторий, занимающихся широким спектром проблем [1]. Крупнейшие транснациональные корпорации General Electric, Cisco, Intel, Huawei, Nokia в рамках аутсорсинга построили крупные НИОКР-центры в Индии (г. Бангладор), Microsoft – в Пекине [7].

В последние годы транснациональные корпорации открывают исследовательские центры и в крупнейших городах России (Москва, Санкт-Петербург, Нижний Новгород, Новосибирск), причем российские специалисты в основном привлекаются на стадии исследований и разработок. Работают они преимущественно в секторах информационных технологий (ИТ) и электронике (Intel, Motorola, Sun), аэрокосмической промышленности (Boeing, Airbus) и нефтедобычи (Schlumberger). На рынке услуг в области информационных технологий в России действуют более десятка фирм США, а также фирмы европейских государств. Наиболее крупные позиции здесь занимает корпорация IBM. Конкурентами IBM среди других западных компаний на российском рынке ИТ-аутсорсинга являются Hewlett-Packard и Siemens. В России наиболее распространена разработка программного обеспечения на заказ. Зарубежные компании рассматривают российские фирмы-разработчики программного обеспечения в качестве офшорных компаний. Весьма активно наступают на российский рынок международные корпорации и в сфере нефте- и газодобычи. Около 15% российского нефтесервисного рынка контролируют высокотехнические западные компании, в основном американские: Halliburton, Schlumberger, Baker Hughes и др. Их доля в сейсморазведке достигла 13%, в бурении – 48%, а в геофизике – 31% [6].

## **2. Развитие инновационной экономики и конкурентоспособность**

Для изучения инновационного потенциала и уровня развития страновых экономик используются количественные характеристики, основанные как на результатах опросов руководителей компаний и специалистов-экспертов, так и на оценивании различных страновых экономических показателей.

**2.1. Конкурентоспособность и инновационная активность.** Национальная конкурентоспособность является главным показателем состояния экономики страны и перспектив ее развития. Ее изучением занимаются многие аналитические центры мира. Среди них наиболее представительными являются исследования, проводимые двумя швейцарскими институтами – Всемирным экономическим форумом (World Economic Forum, WEF) и Международным институтом развития менеджмента (International Institute for Management Development, IMD), которые ежегодно публикуют доклады о конкурентоспособности стран и соответствующие рейтинги. Рейтинги осно-

ваны на комбинации общедоступных статистических данных и результатов опроса руководителей компаний, обширного ежегодного исследования, которое проводится Всемирным экономическим форумом совместно с сетью партнёрских организаций – ведущих исследовательских институтов и компаний, специализирующихся на вопросах конкурентоспособности и экономического развития, в странах, охваченных исследованием. Рейтинг конкурентоспособности определяется по двум показателям – индексу роста конкурентоспособности (*Growth Competitiveness Index, GCI*) и индексу конкурентоспособности бизнеса (*Business Competitiveness Index, BCI*), которые отражают макро- и микроэкономическое положение страны [1].

*Индекс GCI* позволяет оценить способность страны поддерживать устойчивый рост в средне- и долгосрочной перспективе. В его основе лежат: 1) макроэкономические условия, 2) состояние государственных институтов и 3) уровень технологического развития. *Индекс BCI* используется для оценки конкурентоспособности на уровне фирм. Он рассчитывается на базе двух других индексов: 1) объема операций и стратегий компаний, 2) качества национальной бизнес-среды. В табл. 2 представлен мировой рейтинг конкурентоспособности стран, составлявших первую десятку в 2004 г. По обоим показателям с 2001 г. 1-е место делили США и Финляндия. Россия в 2004 г. заняла лишь 70-е место среди 104 стран по индексу роста конкурентоспособности и 61-е – по индексу конкурентоспособности бизнеса [1].

Таблица 2

Источник: [1]\*

Рейтинг конкурентоспособности стран, вошедших в первую десятку в 2004 г.

	По индексу роста конкурентоспособности					По индексу Конкурентоспособности бизнеса			
	2001	2002	2003	2004		2001	2002	2003	2004
Финляндия	1	2	1	1	США	2	1	2	-
США	2	1	2	2	Финляндия	1	2	1	2
Швеция	9	5	3	3	Германия	4	4	5	3
Тайвань	7	3	5	4	Швеция	6	6	3	4
Дания	14	10	4	5	Швейцария	5	5	7	5
Норвегия	6	9	9	6	Великобритания	7	3	6	6
Сингапур	4	4	6	7	Дания	8	8	4	7
Швейцария	15	6	7	8	Япония	12	11	13	8
Япония	21	16	11	9	Нидерланды	3	7	9	9
Исландия	16	12	8	10	Сингапур	9	9	8	10
Россия	3	66	7	70	Россия	6	58	65	61

\* По данным "The Global Competitiveness Reports" (World Economic Forum) за соответствующие годы.

Комплекс индикаторов развития конкурентоспособности GCI WEF составляется на основе опросов нескольких тысяч менеджеров высшего звена и оценок макроэкономической ситуации, способности страны создавать и внедрять новейшие технологии, качества государственного управления, общей инфраструктуры, эффективности банковской системы. На основании этих данных рассчитывается индекс конкурентоспособности развития в баллах (ИКР) и определяется место страны в мировом рейтинге. ИКР страны включает три подчиненных индекса – индекс технологический (ИТ), индекс государственных институтов (ИГИ) и индекс макроэкономической среды (ИМС), по которому также определяется индивидуальное место страны в мировом рейтинге [8].

Для анализа по технологическому (инновационному) индексу эксперты WEF разделили все государства на основные (coreinnovators) и неосновные инновационные страны (non-core innovators). *В странах 1-й группы* технологии обеспечивают 50% показателя конкурентоспособности и по 25 % – индекс состояния государственных институтов и макроэкономической среды. *В странах 2-й группы* указанные индексы обеспечивают по 1/3 этого показателя. Таким образом, в современных условиях удельный вес инноваций в общем индексе конкурентоспособности государств составляет от 1/3 до 1/2 [1].

Наиболее представительными рейтингами инновационной активности стран является комплекс индексов и индикаторов активности стран, представляемый ЕС в Европейском Инновационном табло (European Innovation Scoreboard – EIS). Эта система возникла в результате курса Европейского Сообщества на повышение инновационной активности экономики стран-участниц ЕС. EIS позволяет выполнять наглядную оценку состояния развития инновационного процесса в странах, динамику изменений в инновационной активности, оценивать сильные и слабые стороны отдельных стран и степень разрыва между ними, а также накапливать и использовать по результатам анализа опыт передовых стран для усовершенствования инновационной политики. Система показателей 2001-2003 г.г. включала 19 индикаторов, которые были разделены на 4 группы: человеческие ресурсы для инноваций (5 главных индикаторов), создание новых знаний (4 главных индикатора), передача и применение знаний (3 главных индикатора), финансирование инноваций, продажи и рынки (7 главных индикаторов)]. В 2005 г. было проведено дальнейшее усовершенствование EIS: EIS-2005 уже состоял из 5 категорий индикаторов, которые разделены на 2 группы, включающие 26 ключевых показателей инновационной активности [8].

К входным индикаторам инновационной деятельности относятся:

1. «Факторы осуществления инноваций» – структурные предпосылки, которые нужны для развития инновационного потенциала. Пять показателей – дипломированные специалисты в сфере науки и инженерии в возрасте 20-29 лет; население с последипломным образованием в возрасте 25- 64 лет; проникновение широкополосных линий в Интернет, участие в обучении на протяжении жизни в период 25-64 лет; уровень среднего образования молодежи.

2. Уровень инвестиций в НИОКР. Пять показателей, рассматриваемых как ключевые элементы для построения успешной экономики на базе знаний – государственные расходы на НИОКР; расходы бизнеса на НИОКР; доля высокотехнологических НИОКР; доля предприятий, получающих государственное финансирование на инновации; доля университетских расходов на НИОКР, финансируемая бизнес-сектором.

3. «Инновации в предпринимательстве» – оценка инновационной деятельности на микроэкономическом уровне. Шесть показателей – фирмы, внедряющие самостоятельно новые продукты или процессы; инновационные фирмы, кооперирующиеся с другими фирмами и институтами в последние три года; инновационные расходы; венчурный капитал на ранних стадиях; расходы на информационно-коммуникационные технологии (ИКТ); фирмы, использующие нетехнологические формы инноваций.

Выходными индикаторами инновационной деятельности являются:

1. «Применение» – оценка структуры занятости, производства и реализации с инновационной точки зрения и роль инноваций в создании добавленной стоимости. Пять показателей: занятость в высокотехнологическом секторе услуг; экспорт высокотехнологических продуктов как часть всего экспорта; продажи новых продуктов для рынка; продажа новой для фирмы, но не новой для рынка продукции; занятость в высокотехнологическом производстве.

2. «Интеллектуальная собственность» – достигнутые результаты с точки зрения активности патентования. Пять показателей: патенты выданные Европейским патентным ведомством; патенты выданные Американским ведомством патентов и торговых марок; патенты Триады ведомств; новые торговые марки; новые промышленные образцы.

В систему EIS-2005 были включены показатели инновационной активности 33 стран, в т.ч. страны расширенного ЕС, ассоциированные члены ЕС, а также США, Японии и Турции. Первые три места в этом рейтинге заняли Швеция, Швейцария и Финляндия с соответствующими индексами инновационной активности равными 0,72; 0,71 и 0,68. Согласно рейтингу конкурентоспособности GCI WEF 2005 г. эти страны находились также в первых по-

зициях – третьей, восьмой и первой соответственно, и это еще раз показывает, что инновационно-технологическое развитие страны предопределяет и ее конкурентоспособность [8].

**2.2. Инновационная активность корпораций.** Значительную роль в развитии инновационной экономики играют корпорации. Их доля затрат на исследования и разработки в общем объеме национальных НИОКР в большинстве развитых стран на 2008 г. превышает 65%: Япония – 77%, США – 65%, Германия- 68%, Китай – 69%, Россия – 29% [7,9]. Государственные инвестиции не могут сравниться с корпоративными по объему затрат, численности научных кадров, количеству получаемых патентов, потоку технических новинок в виде продуктов, процессов и услуг. Для оценки страновой и региональной инновационной активности рассматривается такой количественный признак, как доля инновационных предприятий и инновационных продуктов в общем объеме производства или структуре внешней торговли (см. табл.3).

Таблица 3  
Источник: [10]

Показатели инновационной активности России и ЕС

Показатель, %	Россия	Группа инновационных лидеров
Доля работников, занятых в инновационно активных организациях	36	52
Доля выручки инновационно активных организаций в общей выручке	48	83
Доля высокотехничной продукции в экспорте промышленности, 2006 г.	9	20
Доля инновационной продукции в выручке, 2004 г.	5.5	16.1
Интенсивность затрат на технологические инновации	1.44	3.81

Исследование Европейского Союза «The EU Industrial Tnvestment Scoreboards» 2009 г. показало, что:

1) даже в период кризиса 2008 г. интенсивность инвестиций в исследования и разработки в развитых странах сохранялась – из исследованных 100 компаний 46 увеличили объем расходов на НИОКР, из них 19 – более чем на 10%;

2) 93% всех мировых корпоративных инвестиций в исследования и разработки приходится на США, Западную Европу и Японию;

3) в число 50 крупнейших инновационных компаний мира входят 19 американских, 18 европейских и 12 японских корпораций. В последние годы в лидеры стремятся компании развивающихся стран – в 2010 г. в список 50 крупнейших инновационных компаний уже вошли 4 китайские корпорации (BYD, Hair Electronics, China Mobile, Levono), 3 южнокорейские (Hyundai Motor, Samsung Electronics, LG Electronics) и 2 индийские (Tata Group, Reliance Industries) [7].

Таким образом, становится очевидным, что в настоящее время конкурентоспособность и коммерческий успех все больше определяются способностью компаний к инновациям, проведению научных исследований, продвижению на рынок новых товаров, улучшению качества уже существующих продуктов. Однако инновационный процесс и формирование национальных инновационных систем зависит еще от целого ряда факторов, связанных с социальными и экономическими условиями.

### **3. Национальные инновационные системы и государственная политика**

**3.1. Модели инновационного развития.** Инновационные системы, создаваемые в отдельной стране, получили название национальных инновационных систем (НИС). В современном понимании национальная инновационная система – это совокупность национальных государственных, частных и общественных организаций и механизмов их взаимодействия, в рамках которых осуществляется деятельность по созданию, хранению и распространению новых знаний и технологий. Выделяются три типа моделей инновационного развития: «евроатлантическая», «восточноазиатская» и «альтернативная». Евроатлантическая модель является моделью полного инновационного цикла – от возникновения инновационной идеи до массового производства готового продукта. Эту модель используют страны, лидирующие в рейтингах мировой конкурентоспособности национальных экономик, такие как США, Великобритания, Германия и др. Восточноазиатская модель – это модель, в которой в основном отсутствует стадия формирования фундаментальных идей. Государства Восточной Азии ориентированы в основном на экспорт высокотехнологичной продукции, заимствуя технологии у стран евроатлантической модели. Классический образец такой инновационной модели – инновационная система Японии. Альтернативная модель инновационного развития используется преимущественно в сельскохозяйственных странах – в странах с такой системой практически отсутствует высокотехнологический компонент как таковой. К этой модели относятся национальные инновационные системы Таиланда, Чили, Турции, Португалии и т.д. Эти страны в своей иннова-

ционной политике делают упор на подготовку кадров в сфере экономики, финансов, а также на развитие отдельных отраслей легкой промышленности и креативной индустрии. По мнению ученых, такая модель может использоваться для построения российской национальной инновационной системы, но не в общенациональном, а в региональном масштабе, т.к. некоторые регионы России не обладают ни значительным потенциалом в области фундаментальной или прикладной науки, ни достаточными для выстраивания высокотехнической цепочки ресурсами. Упор на развитие образования, менеджмента, сферы услуг, индустрии туризма поможет этим регионам успешно интегрироваться в НИС РФ [11].

**3.2. Особенности национальных инновационных систем.** Рассмотрим наиболее эффективные инновационные системы развитых стран.

*Иновационная система США* является одной из них. Для нее характерны: огромные по сравнению с другими странами расходы на НИОКР, государственное финансирование значительной части расходов на НИОКР, защита интеллектуальной собственности в рамках государственной инновационной политики (стимулирование активного патентования), большая доля венчурного капитала в общем объеме финансирования НИОКР, тесные связи между компаниями и университетами. Финансирование НИОКР в США осуществляется промышленными компаниями, другими частными организациями и администрацией США. Участие в научно-исследовательских работах принимают также другие правительственные структуры. Министерство энергетики США, например, участвует в международном проекте стоимостью 5 млрд. долл. по строительству АЭС нового типа [12]. Для стимулирования НИОКР в частных компаниях и облегчения деятельности молодых компаний, работающих в области высоких технологий, государством предоставляются налоговые льготы. Например, если ассигнования на НИОКР в текущем году превышают средний уровень последних трех лет, налогообложение доходов компаний может быть сокращено на 20–25%, компании получают налоговые льготы при финансировании вузов и предоставлении им оборудования [1].

*Европа* в области инноваций отстает от США. Расходы на НИОКР в странах ЕС значительно ниже, чем в Соединенных Штатах (табл. 4). Кроме того, Европа столкнулась с теми же проблемами, которые наблюдаются в России – это и отсутствие финансовых возможностей для инвестиций в НИОКР у средних и мелких компаний, которым доступ к банковским кредитам почти закрыт, и “утечка” квалифицированных ученых и исследователей в США, где созданы лучшие условия для проведения исследований и карьерного роста. Чтобы удержать свой научно-технический потенциал и привлечь специалистов из других регионов, а также сделать результаты совместно фи-

нансиремых НИОКР полезными экономике и обществу, Еврокомиссия и большинство стран ЕС настаивают на увеличении совместного бюджета НИОКР. Активную роль в процессе формирования инновационных систем национального и регионального уровней играют государства, правительства которых озабочены улучшением инновационного климата в своих странах.

Таблица 4  
Источник: [1]

Расходы на НИОКР в мире в 2002 г. (%ВВП)\*

Страны	Доля расходов на НИОКР в ведущих странах мира	Доля промышленности в финансировании НИОКР
Швеция	4.27	71.9
Финляндия	3.46	69.5
Япония	3.12	73.9
США	2.80	68.9
Германия	2.55	69.8
Франция	2.20	54.2
Нидерланды	1.89	51.8
Великобритания	1.88	46.7
Китай	1.22	61.3
Италия	1.11	Нет данных
ЕС-15	1.93	56.0

\*По данным ОЭСР

Правительство Великобритании считает необходимым оказывать содействие промышленности не только посредством увеличения финансирования научных исследований. Существенным стимулом к развитию инновационного процесса стали три основные инициативы:

1) создание Совета по технологической стратегии Великобритании (UK Technology Strategy Board), бюджетом которого было предусмотрено в 2004–2006 гг. выделить на поддержку инноваций свыше 150 млн ф. ст., которые направлялись на финансирование проектов (Knowledge Transfer Networks) с целью выявления перспективных научных направлений и передачи результатов исследований предпринимательским структурам для их дальнейшей коммерциализации, а также для финансовой поддержки конкретных программ;

2) формулирование и публикация приоритетов в области исследований и технологий (Research and Technology Priorities);

3) создание Центра поддержки процесса инноваций, призванного содействовать инновационной деятельности путем ликвидации препятствий и

рисков в этой сфере. Центр также способствует объединению усилий промышленности и академической науки [13].

Правительство Франции после Лиссабонской встречи наметило пять основных направлений формирования инновационной политики в 2005–2006 г.г. [14]:

- 1) разработка инновационного плана и обширные консультации;
- 2) создание “полюсов конкурентоспособности”;
- 3) создание Национального научного агентства, которое будет оказывать поддержку ученым в сотрудничестве с бизнес-сектором, и подготовка закона об ориентации науки;
- 4) объединение Национального инновационного агентства (АНВАР) и Банка развития малых и средних предприятий в единую организацию (ОЗЕО);
- 5) создание национального Агентства промышленных инноваций (АПИ), которое должно оказывать содействие крупным промышленным корпорациям в их инновационной деятельности.

В Японии, чтобы сохранить конкурентоспособность в экономическом противостоянии с набирающим силы Китаем а также США и другими промышленно развитыми странами, Министерство экономики и промышленности разработало план развития страны в XXI в. В качестве приоритетных выбраны 7 направлений: создание информационных (интеллектуальных) бытовых приборов, разработка топливных элементов на водороде и роботов, производство художественных и анимационных фильмов, здравоохранение, поддержка японского бизнеса, охрана окружающей среды и исследования перспективных источников энергии. Новая стратегия, по утверждению специалистов, “концентрирует силы и ресурсы Японии на тех областях, где она способна сохранить ведущие позиции” [1].

**3.3. Государственное содействие экспорту.** Решая задачи повышения национальной конкурентоспособности, индустриально развитые и многие развивающиеся страны значительно увеличили интенсивность и масштабы государственного содействия экспорту. В США, например, на поддержку экспорта в 2005 г. было потрачено свыше 10 млрд дол. в год, в Китае – 7 млрд дол., в Чехии – 1,8 млрд дол. Для сравнения – в России на господдержку экспорта промышленной продукции государственным бюджетом в том же году было предусмотрено немногим более 700 млн дол. (из них 600 млн дол. – на предоставление государственных гарантий) [1]. За рубежом поддержку экспорта осуществляет целая система взаимодействующих между собой правительственных и негосударственных институтов, включая профильные министерства и ведомства, специализированные агентства и экспертные цен-

тры, финансовые структуры, региональный и зарубежный аппарат. Непременным условием успешной экспортной политики является наличие координирующего органа, как правило, в лице специализированной государственной организации. Зачастую такой организацией становится государственное агентство, имеющее собственный аппарат и бюджет, решающее задачи информационно-консультативного, организационного, маркетингового содействия экспортерам и тесно взаимодействующее с экспортно-импортными банками, компаниями по страхованию и гарантированию экспортных кредитов. В Германии – это Федеральное агентство внешнеэкономической деятельности, во Франции – Агентство международного развития предприятий, в Великобритании – Агентство британской международной торговли. Одной из лучших государственных служб в европейских странах было признано функционирующее с 1997 г. в Чехии Агентство поддержки торговли (ЧЕХ-ТРЕЙД). В США функции поддержки экспорта выполняет Администрация международной торговли, входящая в состав Министерства торговли. Она включает Координационный комитет содействия торговле, согласующий усилия около 20 госструктур в сфере продвижения экспорта, а также 3 подразделения: департамент американской и иностранной коммерческой службы, департамент по доступу на рынок и департамент развития торговли. Бизнес получает также мощную информационную поддержку. Ежегодно правительственные органы издают сотни статистических сборников и обзоров с подробной информацией о внутреннем рынке и мировой экономике, компаниях и банках, с прогнозами хозяйственной конъюнктуры [1].

Многочисленные исследования мировой инновационной среды показывают, что ее изменение происходит по трем направлениям, так или иначе завязанным на государственное и корпоративное управление научно-техническим прогрессом (НТП): 1. В развитых странах государство, создав экономическую и правовую среду для преимущественного инновационного развития экономики, понемногу уступает главенство в определении НТП бизнесу, в первую очередь, крупному, т.к. спрос на высокотехнологичный продукт принуждает корпорации оплачивать расходы на его получение. В результате именно крупные корпорации становятся основным двигателем в развитии глобальной экономики. 2. Происходит изменение подхода к управлению НТП в самих корпорациях – создание технологий внутри крупных компаний (или под их прямым управлением) становится неотъемлемой частью их бизнес-процессов. При этом сокращаются расходы на собственные НИОКР и растет объем инновационного аутсорсинга. Традиционные исследовательские структуры – университеты, академические и отраслевые НИИ активно вовлекаются в инновационную деятельность корпораций. 3. Проис-

ходит глобальная миграция центров промышленного производства – основного современного потребителя инновационной продукции, а вслед за этим перемещение центров НИОКР, причем основной движущей силой таких перемещений также выступают транснациональные корпорации [15]. Развитие современной экономической и инновационно-технологической системы нашей страны происходит в русле общемировых тенденций при условии сохранения национальной специфики. Исследованием различных аспектов этой проблемы занимаются многие зарубежные и отечественные научные центры.

#### **4. Оценка состояния российской инновационной системы**

**4.1. Оценка конкурентоспособности и современного состояния России с помощью индекса глобальной конкурентоспособности.** Исследованию современного состояния экономического развития России, анализу ее конкурентоспособности посвящен очередной Доклад Всемирного экономического форума (WEF) 2011 г. Для оценки конкурентоспособности стран в исследовании использовался Индекс глобальной конкурентоспособности GCI (Global Competitiveness Index). Были опрошены более 13 500 лидеров бизнеса в 139 экономиках по всему миру [16]. Анкета была составлена так, чтобы охватить широкий круг факторов, влияющих на экономическое развитие. Включён подробный перечень сильных и слабых сторон конкурентоспособности стран, что делает возможным определение приоритетов для реализации реформ. В Докладе приводится сравнительный анализ России с другими странами, которые достигли большего успеха в повышении уровня доходов и создании экономических возможностей для своего населения. В нем отмечается, что экономика России могла бы расти так же быстро, как и в других странах БРИК, однако в последние годы ее конкурентоспособность опустилась ниже уровня Бразилии, Индии и Китая. К основным конкурентным недостаткам России были отнесены: неразвитые общественные институты, ограниченная конкуренция на товарных рынках, снижающееся качество образования, недостаточно развитые финансовые рынки и низкая конкурентоспособность компаний. К основным конкурентным преимуществам – образованные трудовые ресурсы, большой размер рынка и природные ресурсы. Инновации, по мнению авторов Доклада, смогут стать основной движущей силой роста экономики в будущем, если будет реализована комплексная программа мер по развитию национальной инновационной системы. Указывается, что страна потенциально может развиваться так же быстро, как и другие страны БРИК, при условии, что будут предприняты меры по повышению ее конкурентоспособности. Авторы доклада отмечают, что за последние годы конкурентоспособность России снизилась по двум причинам: 1) из-за недостатков

национального бизнес-климата производство в стране стагнировало; 2) Россия не смогла капитализировать свои ключевые преимущества: образованную рабочую силу, природные ресурсы, а также выгодное географическое положение наряду с таким важным фактором, как большой размер рынка. Поэтому, чтобы поднять производство стране нужно будет решить пять основных проблем: – создать более развитую институциональную среду и гарантировать верховенство права; – повысить качество образования, чтобы поддержать преимущество России в человеческих ресурсах; – значительно улучшить состояние российской экономики за счёт обеспечения более интенсивной конкуренции и содействия развитию предпринимательства; – постоянно повышать устойчивость финансовых рынков и облегчать доступ к финансированию для бизнеса, что станет ключевыми факторами экономического роста; – по мере того, как будет снижаться зависимость экономики от природных ресурсов, возрастет роль развитости национального бизнеса, поэтому в этой сфере необходимо стимулировать обмен знаниями и опытом. Особое внимание в данном Докладе посвящено инновациям, при этом отмечается, что в России нужно применить комплексный подход к инновационной политике, предусматривающий как меры, позволяющие получить относительно быстрые результаты, такие как технологическая политика, так и программы, нацеленные на более долгосрочную перспективу – такие как поддержка инновационных предприятий малого и среднего бизнеса и повышение финансирования и эффективности НИОКР. Это будет способствовать дальнейшему росту инновационного потенциала, который, в основном, базируется на преимуществах в человеческих ресурсах и всё ещё большом потенциале для ведения научных исследований и разработок. Таким образом, по мнению авторов Доклада, создание новых рабочих мест с высокой производительностью в рыночных секторах экономики и привлечение качественных прямых иностранных инвестиций должны стать целями и желаемыми результатами новой, ориентированной на конкурентоспособность экономической политики для России. Достижение этих целей, по мнению авторов Доклада, должно позволить стране естественным образом достичь и экономических, и социальных результатов [16].

**4.2. Проблемы выработки национальной инновационной стратегии России.** Итак, в России на сегодняшний день не создано соответствующих условий к переходу на инновационный путь развития. По данным Всемирного банка, она по индексу глобальной конкурентоспособности на 2010-2011 гг. занимает 63-е место, опустившись за последние 3 года с 51 места в 2008-2009 гг.), причем хуже всего положение остается в области инноваций и совершенствования производства – здесь она занимает 80-е место. Освоением ин-

новационной продукции в настоящее время занимается лишь 6% российских промышленных предприятий, в то время как в таких развитых странах как Германия, США, Франция и Япония – от 70 до 82% [17]. Таким образом, место России в мировых инновационных процессах в настоящее время оказалось не адекватным имеющемуся в стране интеллектуальному и образовательному потенциалу. Причин этого явления много – остановимся на основных. Как известно, инновационный процесс включает стадии разработки, освоения и распространения новой продукции. Воспроизводственный цикл создания и внедрения инноваций в 90-е гг. в России оказался разорванным, а связь между освоением и распространением инноваций так и не сформировалась. Таким образом, Россия оказалась не готова к массовому освоению и внедрению инновационной продукции. Чтобы приостановить растущее отставание России от ведущих стран по уровню инновационной деятельности, необходимо существенно увеличить удельный вес инновационной промышленной продукции. Это возможно только при условии создания национальной инновационной системы. И первый шаг в этом направлении состоит в выработке правильной инновационной стратегии, намечающей цели и крупные долгосрочные задачи, а также обеспечивающей средства для их решения. Определенный интерес для этого может представлять изучение подходов к формированию национальных инновационных систем в передовых развитых странах.

**4.2.1. Оценивание НИС с помощью SWOT-анализа.** На состоявшемся в Москве в июне 2005 г. семинаре “Создание национальных инновационных систем: российская и европейская практика” на примере Франции был продемонстрирован национальный инновационный SWOT-анализ, дающий реальную оценку инновационных ресурсов и возможностей этой страны применительно к состоянию (и потребностям) внешней среды [1].

На основе данного анализа можно выстраивать рациональную инновационную стратегию. Классический SWOT-анализ используется, как правило, в качестве инструмента стратегического управления фирмой. Он выявляет сильные и слабые стороны деятельности компании, потенциальные внешние угрозы и благоприятные возможности, их оценку в баллах относительно среднеотраслевых показателей или по отношению к данным стратегически важных конкурентов. SWOT-матрица предоставляет руководителям компании структурированное информационное поле, в котором они могут ориентироваться и принимать стратегические решения. Рассмотрим факторы, учитываемые французскими экспертами в национальном инновационном SWOT-анализе (табл. 5).

Сильные и слабые внутренние стороны, отмеченные для Франции, по ряду позиций типичны и для России. Например, государственный научно-исследовательский потенциал и качество высшего образования в нашей стране до сих пор еще находятся на достаточно высоком уровне, а патентование и использование результатов бюджетных научных исследований на полном основании можно отнести к слабой стороне. Внешние угрозы для России и Франции полностью совпадают. Это – старение населения (в том числе и самих исследователей), излишне сложная административная система, негибкость системы научных исследований, “утечка мозгов”, концентрация научного потенциала в столичном регионе и т.п. Подобный SWOT-анализ, проводимый в российских условиях, может позволить при выработке российской инновационной стратегии более четко представлять внутренние инновационные ресурсы, возможности и потенциальные угрозы в сфере инновационного развития [1].

Таблица 5  
Источник: [1]

Национальный инновационный SWOT-анализ (на примере Франции)

<p><b>Сильные внутренние стороны (S)</b>          Бюджетные расходы на научно-техническую сферу.          Государственный научно-исследовательский потенциал.          Качество высшего образования.          Доля высокотехнологического экспорта.</p>	<p><b>Слабые внутренние стороны (W)</b>          Патентование.          Использование результатов бюджетных научных исследований.          Низкий уровень участия в научно-исследовательских программах, финансируемых ЕС.</p>
<p><b>Благоприятные внешние возможности (O)</b>          Расходы промышленности на научные исследования.          Хорошие тенденции деятельности малых и средних предприятий / сетевое взаимодействие.          Рост интереса к сетевому взаимодействию, продвижение государственно-частных партнерств.          Доступ к Интернету, использование информационных и коммуникационных технологий.          Высокотехнологичный венчурный капитал, фонды “посевного” капитала.          Потенциал для увеличения роли финансовых рынков.          Развитие предпринимательской культуры.</p>	<p><b>Внешние угрозы (T)</b>          Старение населения, старение исследователей.          Усложненность административной системы.          Негибкость системы научных исследований.          Региональный дисбаланс, концентрация научного потенциала в столичном регионе.          Политическая решимость к инновациям.          "Утечка мозгов", низкая привлекательность научной карьеры.          Низкий уровень интернационализации.</p>

**4.2.2. Стратегия инновационного развития России.** Стратегия инновационного развития России призвана ответить на стоящие перед страной вызовы и угрозы в сфере инновационного развития за счет выстраивания четкой системы целей, приоритетов и инструментов инновационной политики. Опираясь на результаты всесторонней оценки инновационного потенциала, Долгосрочного научно-технологического прогноза, она должна стать ориентиром для разработки концепций и программ социально-экономического развития. Ранее принятая «Стратегия-2015» оказалась невыполненной – из запланированных на первых двух этапах — в 2006–2010 гг. было выполнено лишь чуть более трети намеченного; положение в стране оказалось на текущий момент хуже, чем в инерционном сценарии, причем ухудшились ключевые параметры инновационного развития [18]. В принятой «Стратегии – 20» углубление отставания России от других стран объясняется тем, что на фоне закачки значительных дополнительных средств в инновационное развитие целым рядом стран, которые в борьбе с кризисом расчищали путь для новых производств, в России расчистки завалов не произошло. В процессе обсуждения новой стратегии экспертами были отмечены как достоинства, так и допущенные, с их точки зрения, существенные упущения при ее создании и предложены современные, опирающиеся на опыт передовых стран, пути их решения. На некоторых из них мы остановим свое внимание:

1. Выделяя три сценария инновационного развития России — инерционный, с упором на импорт технологий, догоняющего развития и смешанный — авторы Стратегии абстрагировались от самых новых наработок управленческой мысли, связанных с дополнением стратегического управления блоком, описывающим методы стратегического управления на основе гибких экстренных решений.

2. В целом ряде стран толчок инновационному процессу дало стимулирование создания новых для страны отраслей или их переделов. В Стратегии не акцентируется внимание на стимулировании традиционных догоняющих инноваций, проистекающих из сектора НИОКР.

3. Существует два направления современных программ инновационного развития – действия, направленные на привлечение в страну «креативного класса» и малого и среднего бизнеса (МСБ), которые не менее важны для перехода на инновационный путь развития, чем НИОКР, инновационная инфраструктура и эффект от роста активности университетов и что, по мнению экспертов, в Стратегии было проигнорировано.

4. Подверглось анализу экспертов положение о том, что играет главную роль в совершенствовании инновационного развития экономики. По их

мнению, в силу сложившихся в стране условий для бизнеса, он вряд ли может взять на себя роль инновационного лидера. В настоящее время в экспертной среде выдвигается гипотеза о формировании в ближайшие десятилетия новых моделей инновационного развития, которые отличаются как от модели национальной инновационной системы (НИС), где главным двигателем являлись фирмы, так и от модели «треугольника» Г. Сабата, которая исходила из превалирования государства, как это было в Японии.

Одна из наиболее проработанных новых моделей получила название концепции «тройной спирали». Она «основана, с одной стороны, на тезисе о доминирующем положении институтов, ответственных за создание нового знания, а с другой стороны, о важности сетевого характера взаимодействия участников инновационного процесса в рамках так называемых «стратегических инновационных сетей», где происходит своего рода пересечение трех множеств отношений (внутри-фирменных, внутри-государственных и внутри-университетских) и создание гибридных институциональных форм, снижающих неопределенность». Такая модель, по мнению экспертов, имеет сильные исторические основания для произрастания в России, где роль лидеров в новой инновационной системе могут взять на себя российские университеты, так как отношения между двумя другими потенциальными лидерами в сфере инноваций — государством и бизнесом — на время дестабилизированы двумя десятилетиями трудного взаимодействия — если в 1990-е годы роль государства была чрезмерно «минимизирована», то в 2000-е годы — маятник, наоборот, чрезмерно сильно качнулся в сторону тотальной бюрократизации и огосударствления [18].

Исследования ЮНКТАД о воздействии новых технологий и инноваций на уровне отдельных фирм обнаруживали их положительное воздействие на эффективность, результаты работы и увеличение доли на рынке, однако наиболее ярко это воздействие проявляется в том случае, если дополняется другими изменениями в управлении фирмой — организационной перестройкой, ростом квалификации работников и менеджмента. Как показывает мировой опыт, макроэкономическая отдача от развития науки и инноваций связана не только с развитием технологий, но и с активизацией процесса технологической рекомбинации и изменений как таковых. Таким образом, только демонополизация и стимулирование конкуренции, с одной стороны, и целенаправленные вложения в образовательные программы на уровне корпораций, с другой, создадут фирмы-инноваторы.

По мнению экспертов, в новых концепциях Стратегии недостаточно внимания уделяется роли государства в инновационных сетях. Государство должно:

1) контролировать процесс диффузии инноваций и создавать при необходимости условия для набора ими критической массы;

2) развивать частно-государственное партнерство, т.к. высокие фиксированные издержки и риски при развитии инновационной активности становятся важным барьером для российских фирм, выходящих на новые для них рынки обрабатывающей промышленности;

3) осуществлять правильную государственную политику, направленную на предотвращение недоинвестирования в знания и состоящую в создании побудительных мотивов для экономических субъектов всех форм собственности к созданию знаний и инноваций. Это связано с тем, что использование результатов науки, как правило, не результат политики на уровне фирмы или уполномоченных государственных структур, а результат совместно выработанной средне- и долгосрочной стратегии [18].

Таким образом, как показывает анализ мирового опыта, при разработке национальной стратегии развития инноваций в будущей экономике важно осознавать, что инновационные структуры имеют четко выраженную страновую, отраслевую и секторальную специфику, и страны даже с близким уровнем социально-экономического развития не могут заимствовать успешные примеры научной и инновационной стратегии друг у друга, ориентируясь только на конечный результат. В каждом отдельном случае необходим осмысленный выбор специфического для каждой страны сочетания из набора возможных политик и мер. В качестве индикаторов достижения поставленных целей можно использовать усредненную динамику положения России в международно-признанных рейтингах инновационной конкурентоспособности и активности, таких как рейтинги Всемирного экономического форума (WEF), Женевского института менеджмента (IMD), а также индикаторов EIS, представляемых ЕС в Европейском Инновационном табло.

#### Литература.

1. Семенова Е.А. Мировой рынок наукоемкой продукции и позиции России. Аналитические обзоры РИСИ. Информационный бюллетень №3 (8). Российский институт стратегических исследований, 2005.

2. Белоусов А.Р. Развитие российской экономики в среднесрочной перспективе: анализ угроз//Проблемы прогнозирования. – 2004.-№1

3. Бендриков М.А., Фролов И.Э. Рынки высокотехнологической продукции: тенденции и перспективы развития.  
<http://www.cfin.ru/press/marketing/2001-2/02.shtml>

4. В.Е. Дементьев. Борьба за нанотехнологическое лидерство. Журнал новой экономической ассоциации, 3-4, 2009 г.
5. Формирование инновационной стратегии аутсорсинга.  
<http://mespb.ru/d/179743/d/sbornik-molodykh-uchenykh.-vyp.-1.pdf#page=240>
6. Аутсорсинг в практике американских компаний «Инвестиции в России» №10, 2008 г.
7. М.А. Никитенкова. Стратегические аспекты инновационной деятельности ИКТ-корпораций США: трансформация бизнес-модели. Материалы 13 всероссийского симпозиума «Стратегическое планирование и развитие предприятий», 10-11 апреля 2012 г.
8. Конкурентоспособность и инновационная активность государств: анализ международных рейтингов и индикаторов.  
[http://iee.org.ua/files/alushta/39-denisyuk-konkur\\_i\\_innov\\_aktiv.pdf](http://iee.org.ua/files/alushta/39-denisyuk-konkur_i_innov_aktiv.pdf)
9. OECD, Main Science and Technology Indicators, April 2008
10. European Innovation Scoreboard 2009. Comparative Analysis Of Innovation Performance – EIS, 2009
11. Проблемы становления национальной инновационной системы в России. Ж..М. Козлова. <http://journal-aacl.intelbi.ru/main>
12. БИКИ. – 2005. – 14 мая.
13. БИКИ. – 21 мая.
14. БИКИ – 26 февраля.
15. Инновации на стороне. <http://www.sibai.ru/content/view/1439/1590/>
16. Доклад о конкурентоспособности России 2011.  
<http://pr.adcontext.net/11/06/09/80069>
17. В.В. Андреев. Некоторые факторы, затрудняющие переход к инновационной модели развития Российской экономики. Материалы 13 всероссийского симпозиума «Стратегическое планирование и развитие предприятий», 10-11 апреля 2012 г.
18. Кузьмина Н. Стратегия инновационного развития России на период до 2020 года — велики ли шансы на успех? <http://www.gosbook.ru/node/14184>

## СОЦИАЛЬНЫЙ КАПИТАЛ: АНАЛИЗ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ЕГО ФАКТОРОВ

### 1. Концепция социального капитала

В последние годы в отечественной и зарубежной литературе помимо основных факторов, влияющих на рост экономической системы, стали выделять такие специфические характеристики как качество связей между субъектами экономики, состояние социальных отношений между ними, уровень доверия и репутацию со стороны партнеров и т.п. Все это можно рассматривать в рамках единого общего понятия «социальный капитал».

До недавних пор социальный капитал был интересен только социологам, и его экономическая привлекательность не была вполне оценена. Однако в последнее время как достоинство социального капитала стали выделять его положительное влияние на доходы рассматриваемой системы.

Наибольший вклад в развитие теории социального капитала внес Пьер Бурдьё [1], который дал формальное определение социального капитала, акцентируя то обстоятельство, что экономическое благополучие системы напрямую зависит от интенсивности ее связей с другими аналогичными системами (партнерами), образующими в целом экономическое *сообщество*, и в этом смысле являющимися его *подсистемами*. Чем активнее данная подсистема вовлечена в жизнь сообщества, чем шире круг ее связей, тем, как правило, подсистема более благополучна. Это обусловлено тем, что по социальным сетям циркулирует полезная информация и такие сети могут стать источником полезных ресурсов.

По Бурдьё социальный капитал представляет собой совокупность реальных или потенциальных ресурсов, связанных с обладанием устойчивой сетью (*durable networks*) более или менее институционализированных отношений взаимного знакомства и признания; участие в жизни сообщества создает опору и «репутацию» (*credential*), что позволяет получать кредиты во всех смыслах этого слова.

Таким образом, социальный капитал является продуктом общественных отношений, средством достижения групповой солидарности.

В таком понимании социальный капитал каждой подсистемы является ресурсом всего сообщества. Объем (уровень) социального капитала подсистемы зависит от экономического, культурного и других показателей, характеризующих участников сообщества, от качества связей между ними.

В качестве подсистемы низового уровня концепция социального капитала рассматривает отдельного индивида (человека). Стремление индивида к увеличению своего социального капитала необходимо связано с затратами других его ресурсов; это может быть время или просто денежные затраты. Например, активная деятельность в связи с участием в группе может вылиться в снижение зарплаты или лишение премий на работе.

М. Грановеттер [2] развивает идеи Бурдьё. Анализируя рынок трудовых ресурсов в США, главной особенностью этого рынка он выделяет значимость личных отношений между его участниками. Он сравнивает рынок капитала и рынок труда.

Рынок капитала является безличностным: чтобы вложить деньги в определенную компанию не нужно знать лично генерального директора фирмы или других топ-менеджеров; более того, процедура осуществляется с помощью брокера на бирже, и все взаимодействие происходит только с ним. Совсем другая ситуация обстоит с рынком труда. Исследуя этот рынок, Грановеттер приходит к выводу, что подавляющее большинство вакансий в фирмах заполняется «по благу». Это явление на рынке труда отчетливо показывает значение социального капитала – он напрямую будет отражаться на доходе индивида. Чем больше у него знакомых, чем больше количество социальных связей, чем лучше их качество, тем проще будет ему найти работу с большим окладом. Но тут возникает и негативный эффект: люди с достаточно большим социальным капиталом имеют, по сути, преимущество перед людьми с низким социальным капиталом; тем самым возникают признаки дискриминации -- последним будет крайне тяжело найти хорошую работу, или даже работу вообще.

Еще одним исследователем, о котором следует упомянуть, является Р. Патнэм [3]. На примере Италии Патнэм вывел прямую зависимость между численностью гражданских организаций региона и уровнем его развития. Так, на севере Италии уровень гражданской активности на порядок выше, чем на юге, и социально-экономическое положение этих регионов лучше. Патнэм показал, что именно в тех регионах Италии, где в прошлом итальянцы наиболее активно вовлекались в новые формы общественной солидарности и социального действия, их потомки достигли высоких форм экономического, политического и социального развития.

Другой причиной для такого разбиения послужило сильное различие регионов по процентному соотношению городского населения. Об этом говорят и другие исследователи, например в России исследования социального капитала проводятся исключительно по городам [4], потому что непонятно, как именно понимать социальный капитал в сельской местности, в каких формах он может быть использован.

Подводя итог, нужно отметить, что ученые до сих пор не пришли к единому мнению относительно социального капитала как общественного блага. В той или иной степени об этом говорят все авторы. Высокий уровень доверия в группе может вылиться в создание преступной группировки. Одним из самых ярких примеров тому могут послужить мафиозные группировки в Америке. В этом плане нужно понимать, что каждая страна имеет свои социально-экономические характеристики, и увеличение социального капитала может иметь абсолютно разные эффекты в каждой из них. Например, большая дифференциация общества по экономическим показателям может отрицательно влиять на значимость социального капитала.

## **2. Определяющие факторы**

В концепции социального капитала основной проблемой является способ его измерения. Изначально социальный капитал измеряли только посредством различных опросов. Сейчас помимо этого стали пробовать измерять его количественными параметрами.

За рубежом проблема измерения социального капитала рассматривается по следующим направлениям.

1. Исследование влияния социальных сетей на уровень социального капитала. Оказалось, что социальные сети – это одно из самых мощных средств в накоплении социального капитала. Причем главное достоинство сетей в том, что кроме своей непосредственной функции в виде поиска новых связей и знакомств, они помогают долгосрочно закрепить уже существующие связи. Социальные сети не только помогают накапливать социальный капитал, но еще и значительно увеличивают отдачу от других факторов. Второе направление – анализ влияния социально-экономических факторов на накопление социального капитала. Так на основе панельных исследований, проводившихся University of Essex [5], были сделаны следующие выводы. Наибольшее положительное влияние на накопление социального капитала оказывает возраст респондента.

2. Оценка вовлеченности респондента в политическую жизнь. Если человек принимает непосредственное участие в деятельности партии, знает, как и на что можно повлиять, доверие к нему со стороны многих общественных институтов растет. Среди остальных факторов были выделены доход, образование, имущество. Возраст и политическую вовлеченность контролировать или очень тяжело или невозможно. Понятно, что с возрастом приходит опыт, связи и уверенность в своих силах и, как следствие, доверие со стороны окружающих. Но каким образом можно проспонсировать или ускорить этот процесс пока не ясно. Другое дело доход, образование и имущество. Тут у государства имеются определенные рычаги, в первую очередь это касается образования.

3. Связь социального капитала с уровнем преступности. Примером может служить исследование, проведенное в Нидерландах [6]. В этом исследовании к довольно распространенной регрессионной модели преступности<sup>1</sup> был добавлен показатель социального капитала. Результаты показали, что в городах с высоким уровнем социального капитала уровень преступности снижен. Недостатком модели является то, что социальный капитал понимался как показатель перманентный и изменяющийся в очень долгосрочном периоде. В этой модели, впрочем, как и во многих других подобных ей, крайне сложно установить причинно-следственные связи. С одной стороны уровень преступности снижается с ростом социального капитала, который проявляется в консолидации общества, не остающегося равнодушным к проблемам человека и старающегося предотвратить нарушение ими закона. С другой стороны, очевидна и обратная связь: там, где процветает преступность, роль социального капитала снижается.

В данной работе в качестве экономических сообществ рассматриваются регионы России, а в качестве их членов – работники и предприниматели.

Подводя итог, мы выделяем ряд факторов, синтез которых определяет уровень социального капитала региона.

---

<sup>1</sup> Обычно такие модели в качестве факторов включают плотность населения, процент населения со средним и высшим образованием, уровень безработицы, процент населения находящегося в возрасте от 15 до 24 лет.

*1. Уровень образования.* Для оценки уровня образования возьмем два показателя : 1-- количество студентов государственных (муниципальных) высших, 2 – количество студентов средних учебных заведений. Как уже отмечалось, социальный капитал определяется количеством и качеством связей каждого индивида. Те знания и связи, которые получены при обучении в вузе, помогают в дальнейшей жизни. Человек, имеющий высшее образование, легче адаптируется в обществе. Связи, установившиеся во время учебы, могут помочь в бизнесе, работе или общественных делах.

Очевидно, уровень образования положительно влияет на уровень социального капитала.

*2. Уровень преступности.* Эконометрический анализ показал, что фактор преступности нельзя использовать в модели непосредственно из-за его сильной корреляции с уровнем образования.

Одновременно выяснилось, что основным фактором, влияющим на преступность, является безработица. Поэтому вместо показателя преступности будем использовать уровень безработицы в регионе, который коррелирует с образованием гораздо слабее. В некотором роде это даже более правильно, так как независимыми переменными можно централизованно управлять.

Можно предположить, что влияние данного фактора на социальный капитал негативно, в обществе с высокой безработицей уровень социального капитала снижается.

*3. Доступность социальных сетей.* Это наиболее интересный показатель, но в федеральной службе государственной статистики непосредственно его нет. Вместо него будем использовать показатель затрат на информационно- коммуникационные технологии (ИКТ) в регионе. Сюда входят затраты по статьям:

- приобретение вычислительной техники
- приобретение программных средств
- оплата услуг связи (в том числе Интернета)
- обучение сотрудников, обеспечивающих развитие и использование ИКТ
- оплата услуг сторонних организаций и специалистов по ИКТ (кроме услуг связи и обучения)
- прочие затраты .

Этот показатель отражает также уровень компьютеризации региона. Логика в данном случае следующая. ИКТ предполагают, во-первых, существование компьютерных клубов, во-вторых – использование индивидуумом Интернета. Влияние показателя ИКТ на уровень социального капитала должно быть положительным.

Теперь необходимо определить переменную, измеряющую эффективность социального капитала.

Как отмечалось выше, для оценки эффекта социального капитала наиболее подходящей является концепция Бурдые, предложившего определять его как увеличение дохода. Поэтому выберем в качестве зависимой переменной среднедушевой (на душу населения региона) денежный доход в месяц; он исчисляется делением объема месячных денежных доходов региона ( $=1/12$  годового дохода) на среднегодовую численность населения.

Денежные доходы региона включают доходы лиц, занятых предпринимательской деятельностью: выплаченную заработную плату наемным работникам; социальные выплаты (пенсии, пособия, стипендии, страховые возмещения и прочие выплаты); доходы от собственности в виде процентов по вкладам, ценным бумагам, дивидендов и другие доходы ("скрытые" доходы от продажи иностранной валюты, денежные переводы, а также доходы, не имеющие широкого распространения).

В результате учитываются все доходы, как работников, так и предпринимателей.

Таким образом, выделены четыре показателя, которыми измеряется уровень социального капитала региона:

- численность студентов высших учебных заведений,
- численность студентов средних учебных заведений,
- уровень безработицы,
- объем затрат на ИКТ.

### **3. Методология исследования**

Основные этапы проведения исследования изложены в [7]. Для оценки силы влияния каждого из выделенных факторов на зависимую переменную

лучше всего использовать регрессионный анализ на основе региональной статистики.

Чтобы получаемые результаты были более достоверными, надо чтобы выборка (подмножество регионов) была по возможности однородной, для чего мы разбиваем регионы России на две группы (два кластера) – бедные и богатые. Разбивка определяется двумя показателями: 1 – среднедушевой доход, 2 – процентное соотношение сельского и городского населения.

Почти все исследования уровня социального капитала в России проходят по городам, сельское население сильно ограничено в количестве связей, а также в способах реализации своего социального капитала. Тем не менее, как раз в деревнях уровень доверия между гражданами особенно высок. Поэтому без кластеризации можно получить неправильные результаты для регионов, где уровень социального капитала высок, а уровень доходов низкий (и наоборот).

*Примечание.* Предварительный анализ, основанный на данных Росстата за период 2000-2010 гг. [8], показал, что среднедушевые денежные доходы населения регионов РФ коррелируют с процентом городского населения ( $R=0.56$ ), поэтому кластеризация регионов РФ по каждому из факторов не будет сильно отличаться от классификаций по обоим факторам. Тем не менее, для классификации будем использовать оба этих фактора. Для того, чтобы классификация была более надежной, будем использовать два независимых метода: *двухшаговый метод* и *метод K-средних* [9]. После построения однородных кластеров, для каждого из них используется регрессионный анализ. При этом проводится корреляционный анализ данных на наличие связей между независимыми переменными.

#### 4. Экспериментальные расчеты и анализ результатов

Приводимые ниже расчеты выполнены на основе данных Росстата за 2010 г. [8]. Для проведения кластерного анализа использовался статистический пакет Statgraphics 5.1 [10], а для регрессионного анализа пакеты STATISTICA 6.0. и EViews 7 [11,12].

**4.1. Кластеризация.** Как указывалось выше, используются два показателя: 1 – среднедушевой доход, 2 – процентное соотношение сельского и городского населения.

**Двухшаговым методом** выделены два кластера, результат представлен на рис. 1. Первый кластер включает регионы с низкими значениями обоих показателей, второй – регионы с высокими показателями (изображающие их на рис. 1 столбики приняты за 100%).

Количество регионов в первом кластере – 66, во втором – 14. Оба показателя значимы.

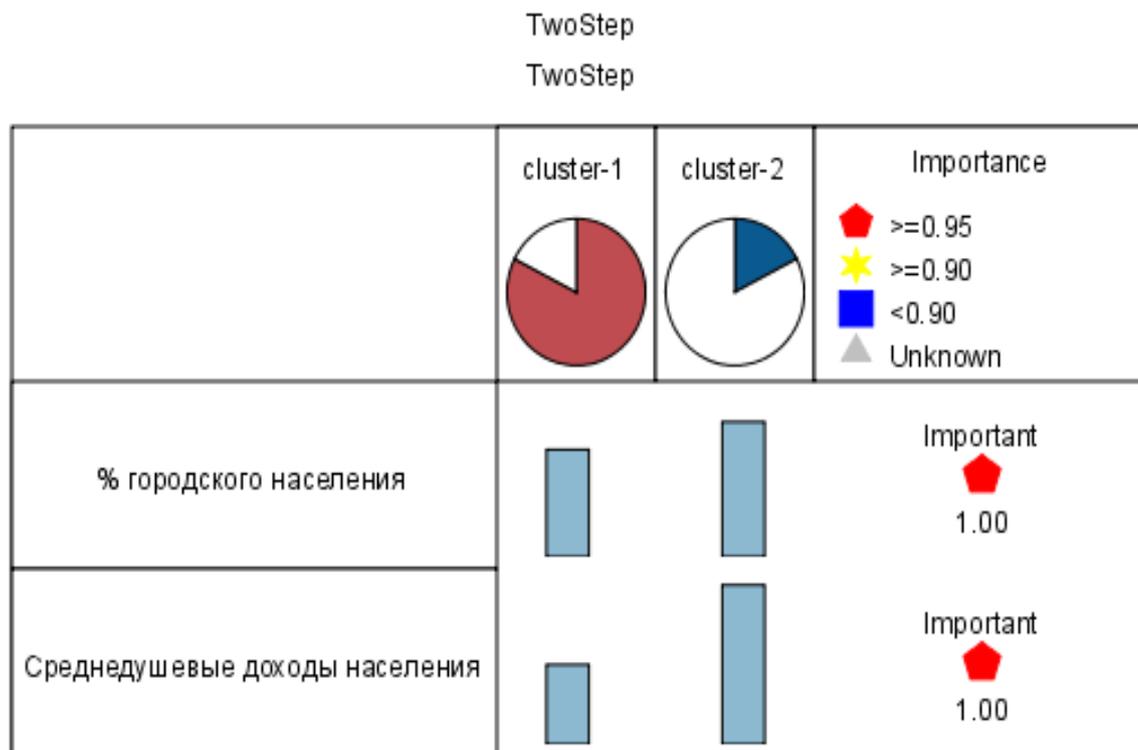


Рис. 1. Кластеризация по двухшаговому методу.

**Методом K-средних** уточним полученную кластеризацию. Сначала предполагаем, что число кластеров четыре по двум признакам: бедные/богатые, и сельское /городское население.

Результат классификации представлен на рис. 2. Оба показателя значимы, но все же количество кластеров необходимо сократить.

Во-первых, количество регионов, попавших в кластеры 2,4 мало, их будет недостаточно для проведения регрессии.

Во-вторых, можно заметить следующую тенденцию: чем больше процент городского населения, тем больше среднедушевые доходы. Поэтому кластеры, где процент городского населения высок, а

среднедушевой доход относительно низкий (и наоборот), уберем, сократив количество кластеров до двух.

Первый кластер («бедные») характеризуется низким процентом городского населения и относительно низкими среднедушевыми доходами, а второй («богатые») – наоборот.

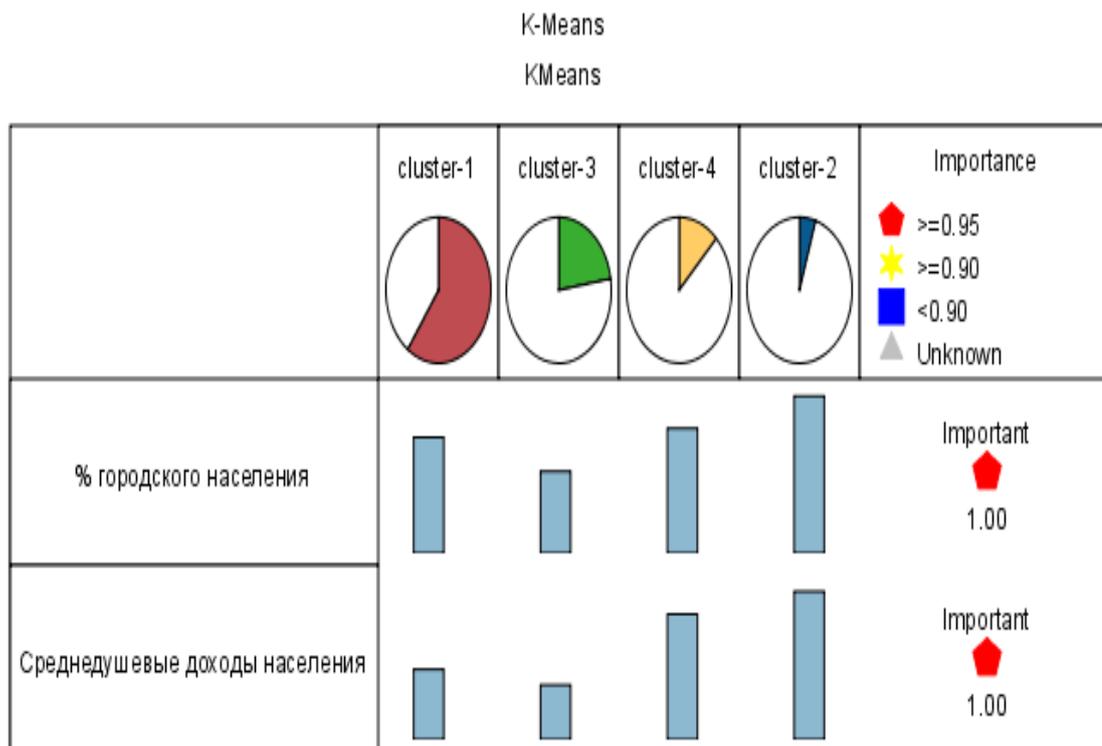


Рис. 2. Разбивка на четыре кластера.

Полученная классификация представлена на рис. 3. Количество регионов в первом кластере – 67, во втором – 13. Все параметры значимы.

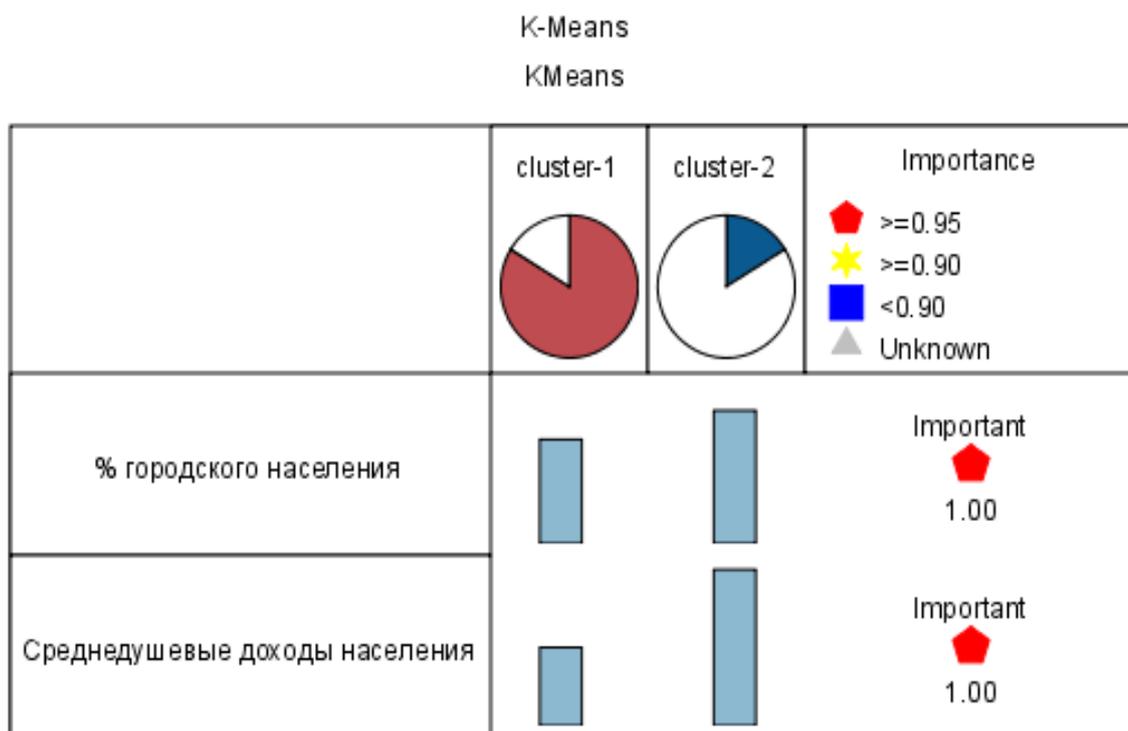


Рис. 3. Два кластера по методу К-средних.

Данная классификация практически совпадает с классификацией двухшагового метода. Разница только в том, что в первом случае Республика Якутия была отнесена к бедным регионам, а во втором к богатым.

Для дальнейшей работы будет использоваться кластеризация, полученная двухшаговым методом (с использованием терминов «бедные/богатые»).

**4.2. Регрессионный анализ.** В соответствии с выделенными факторами применяем модель вида:

$$\ln(\text{income}) = a_0 + a_1 \text{educm} + a_2 \text{educh} + a_3 \text{ict} + a_4 \text{unempl}$$

где

*income* - среднедушевой месячный доход (тыс. рублей)

*educm* - среднее число студентов средних образовательных учреждений за последние 5 лет (тыс. человек)

*educh* - среднее число студентов высших образовательных учреждений за последние 5 лет (тыс. человек)

*ict* – затраты на информационные и коммуникационные технологии (тыс. рублей в месяц на человека)

*unempl* - рейтинг безработицы (в % от населения)

**4.2.1. Предварительный корреляционный анализ используемых показателей.** Анализ проведем отдельно для каждого кластера. Результаты анализа опишем словесно, не затрудняя читателя подробной информацией.

Для бедных регионов показатели *educm* и *educh* сильно коррелируют друг с другом и с показателем *ict*.

Корреляция между переменными *educm* и *educh* объясняется, скорее всего, тем, что в каждом регионе есть фиксированные потребности в соотношении различных специальностей, поэтому увеличение количества студентов высших учебных заведений, естественно, увеличивает количество студентов средних учебных заведений. Министерство образования каждый год, исходя из демографической обстановки, корректирует количество бюджетных мест в учебных заведениях на наиболее востребованные профессии, поэтому соотношение студентов в регионах получается примерно равным, отсюда и корреляция между этими двумя показателями.

В рамках регрессионной модели эту проблему можно было бы решить убрав одну из этих переменных, но их корреляция с затратами на ИКТ скорее всего потребует убрать обе.

Затраты на ИКТ можно интерпретировать как технологический прогресс в регионе, и не удивительно, что они коррелируют с количеством студентов. Выбирая между этими факторами, оставим фактор затраты на ИКТ, т.к. он отражает не просто уровень образования в регионе, но и

конечный результат образования; тем самым, он непосредственно влияет на социальный капитал и, как предполагается, на доходы населения.

Таким образом, из трех рассмотренных показателей мы исключаем показатели *educst* и *educh*, и оставляем только показатель *ict*.

Рассмотрение богатых регионов приводит к аналогичному результату. В итоге регрессионная модель принимает следующий вид:

$$\ln(\text{income}) = a_0 + a_1 \text{ict} + a_2 \text{unempl} .$$

3.2.2. *Результаты регрессионного анализа. Для бедных регионов* результаты представлены в таблице.

Регрессионная таблица

Переменная	Коэффициент регрессии	t-статистика	p-уровень
<b>C</b>	<b>12.39</b>	<b>17.78</b>	<b>0</b>
<i>ict</i>	<b>0.89</b>	<b>3.30</b>	<b>0.001</b>
<i>unempl</i>	<b>-0.14</b>	<b>-3.39</b>	<b>0.02</b>
<b>R-squared =0.47 F(2.61)=15.780 Std. error of estimate: 1.8419</b>			

Все переменные значимы.

Однако значение коэффициента детерминации (R-squared) достаточно мало (0.47), т.е. модель слабо объясняет зависимую переменную. Это значит, что есть еще другие важные факторы, которые не были использованы в модели. Но задачи полностью объяснить формирование зависимой переменной не стояло. К тому же, если использовать большое количество независимых переменных, они могут дублировать один и тот же фактор.

Таким образом, регрессионная модель для бедных регионов имеет вид:

$$\ln(\text{income}) = 12.39 + 0.89ict - 0.14unempl$$

Знаки коэффициентов не противоречат логике, и в целом модель пригодна для дальнейшего анализа.

Гораздо сложнее обстоит дело с кластером **богатых регионов**. Как выяснилось, это наиболее неоднородная группа. Так, в нее попали такие регионы с аномально высокими доходами как Москва и Чукотский автономный округ. Если попытаться исключить все выбросы, то (и без того небольшая) выборка сократится в два раза. Поэтому регрессионный анализ к этой группе неприменим.

## Заключение

Возможно, именно в расслоении общества кроется низкая отдача от инвестирования в социальный капитал. Ведь как писал Бурдье, те социальные сети, которые формируются в обществе и, собственно, являются основой социального капитала, объединяют группу индивидов со схожими социально-экономическими показателями, т.е. получается однородная выборка. Потому та пропасть, которая существует в России между бедными и богатыми, не позволяет этой сети распространяться дальше (сильно уменьшаются качество и возможности сети).

Более того, конкретно в данной ситуации социальный капитал, который возникает в каждой из двух групп, мешает вертикальному лифту развития индивидов: столкнувшись на рынке труда, или, может быть в бизнесе, с представителем разных групп, индивид сделает выбор в пользу представителя своей группы.

Как уже говорилось, группа богатых регионов получилась неоднородной, в ней оказались регионы с высоким среднедушевым доходом. Но причины этого высокого дохода оказались в каждом регионе разные. В крупном мегаполисе Москва высокие доходы сочетаются с огромными затратами на ИКТ, в то время как в Чукотском автономном округе доходы высоки при почти что отсутствующих затратах на ИКТ. Для этой группы модель очень плохо описывает данные.

Корреляционный анализ показал положительную корреляцию между доходом и затратами на ИКТ и отрицательную между доходом и безработицей, но оценить силу этой связи в для богатых регионов не получилось. Кроме того, еще один момент, который мог осложнить анализ: это недостаточная прозрачность данных – чем более развит регион экономически, тем больше данных остается за охватом статистики.

Среди выводов появились и несколько неожиданные.

Как было отмечено, затраты на ИКТ имеют важное значение, поскольку их можно интерпретировать в широком смысле как уровень технологического прогресса

Однако результаты регрессионного анализа не позволяют говорить о том, что инвестиции в социальный капитал являются некой «панацеей» для экономического процветания общества. Можно полагать, что формирование дохода в большей мере зависит от других факторов

Как конечный вывод из проведенного исследования можно высказать некоторые рекомендации.

Во-первых, проводить политику по уменьшению дифференциации общества по социально-экономическим показателям. Возможно, стоит делать это централизованно, управляя прогрессивной ставкой налога.

Во-вторых, продолжать поддержку малого и среднего бизнеса.

В-третьих, так как социальный капитал накапливается, в основном, во время обучения в институте, необходимо предоставить студентам возможность накапливать количество связей. Нужно способствовать консолидации студенческих сообществ различных институтов, как во время отдыха, организовывая совместные поездки, так и во время учебы, организовывая совместные проекты. Консолидация институтов разных профилей может дать сильный эффект.

В заключение необходимо отметить, что рост социального капитала в обществе – явление медленное, внимание к этой проблеме может дать результаты иногда лишь через многие годы. Однако современные исследования показывают важность этого фактора наряду с остальными видами капитала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bourdieu P. Ökonomisches Kapital, kulturelles Kapital, soziales Kapital. In: Kreckel, Reinhard (ed.) *Soziale Ungleichheiten (Soziale Welt, Sonderheft 2)*. Goettingen: Otto Schwartz & Co., 1983.
2. Granovetter M. *Getting a Job: A Study of Contacts and Careers*, 2nd Edition (with a new Preface and a new chapter updating research and theory since the 1974 edition). University of Chicago Press, 1995.
3. Putnam R. D. *Bowling Alone*. New York: Simon & Schuster, 2000.
4. Полищук Е.А. Социальный капитал и его роль в экономическом развитии // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5. Экономика, 2005, вып. 1.
5. <http://courses.essex.ac.uk/gv/gv917/Powerpoints/19%20Factor%20Analysis%20and%20Regression.ppt> (University of Essex).
6. Акçомак I. S., Weel B. "The Impact of Social Capital on Crime: Evidence from the Netherlands," IZA Discussion Papers 3603, 2008.
7. Трофимова Н.А. Анализ факторов, влияющих на динамику социального капитала. // Тринадцатый всероссийский симпозиум "Стратегическое планирование и развитие предприятий", тезисы докладов и сообщений, секция 4. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012.
8. <http://www.gks.ru>.
9. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. *Эконометрика*. – М.: Дело, 2005.
10. <http://www.statgraphics.net>.
11. Ben Vogelvang. *Econometrics Theory and Applications with Reviews*. Publisher: Financial Times Management, 2005.
12. <http://portable4pro.ru/ofis/statistica-6-sovremennyj-paket-statisticheskogo-analiza.html>.

## ОЦЕНКА СТОИМОСТИ МАШИН С УЧЕТОМ ИХ РЕМОНТОВ

### 1. Постановка задачи

Настоящая статья продолжает работы [1,2,3], посвященные моделированию процесса износа машин, применительно к машинам, подвергающимся капитальному ремонту.

Изложим вкратце некоторые исходные положения указанных работ. Под “машинами” мы понимаем отдельно оцениваемые установки, машины, оборудование и транспортные средства.

Рынок машин каждой марки делится на первичный и вторичный. На *первичном* рынке продаются машины *в новом состоянии* (ранее не эксплуатировавшиеся<sup>1</sup>), на *вторичном* – подержанные (бывшие в эксплуатации).

Машина – это типичный представитель *массового* имущества, которое серийно изготавливается (производится, создается) и обращается на рынке в достаточно большом количестве. Машины одного назначения (способные производить одну и ту же продукцию, работы или услуги) мы относим к одному *виду*. Такие машины “взаимозаменяемы” и конкурируют друг с другом на рынке. Машины одного вида мы делим на *марки* (этим термином мы обозначаем также разные модели и модификации). К одной марке мы относим машины, которые в новом состоянии являются идентичными – точными копиями друг друга. В ходе эксплуатации состояние машин меняется в зависимости от условий и режима работы, поэтому подержанные машины одной марки уже не будут идентичными.

Независимо от того, обращается ли на рынке продукция, производимая машиной, или нет, ее эксплуатация приносит владельцу определенные *выгоды*. *Доналоговые* выгоды можно определить как рыночную стоимость произведенной продукции<sup>2</sup> за вычетом затрат по эксплуатации машины (исключая налоги на прибыль и имущество) – такой показатель близок по содержанию к прибыли до начисления амортизации и уплаты процентов и налогов (*Earnings before Interests, Taxes, Depreciation and Amortization*). *Посленалоговые* выгоды отличаются от доналоговых включением налогов

---

<sup>1</sup> Мы не используем термин “новые” – он уместнее для обозначения машин новых марок или модификаций, которые только начинают поступать на рынок.

<sup>2</sup> Если машина производит промежуточную продукцию или отдельные технологические операции, то такие результаты работы, хотя и не обращаются на рынке, тоже обладают определенной полезностью для владельца, а значит, и рыночной стоимостью, отражающей их “вклад” в рыночную стоимость готовой продукции. Другое дело, что эта рыночная стоимость не может быть измерена “непосредственно”.

на прибыль и имущество в состав затрат. По своему содержанию они близки к так называемому чистому операционному доходу или, как его часто называют в оценочной литературе, денежному потоку.

В процессе старения машина подвергается *физическому износу*. Под его влиянием приносимые машиной выгоды с течением времени имеют тенденцию к снижению. Разумеется, эта тенденция нарушается после проведения ремонта, так что в результате динамика приносимых машиной выгод приобретает пилообразный характер. Учет этого обстоятельства является основной целью настоящей статьи. По сути, ремонт – это вторичное воспроизводство машины на основе деталей, бывших в употреблении. Удобно разделять проводимые машине ремонты на текущие и капитальные. *Текущие* ремонты машин производятся часто, но каждый такой ремонт лишь незначительно улучшает состояние машины, и размеры зубцов соответствующей “пилы” невелики. Это позволяет рассматривать текущие ремонты как неотъемлемую часть процесса эксплуатации машины, и считать, что они не нарушают общую тенденцию к постепенному “гладкому” уменьшению приносимых ею выгод. Основное внимание мы уделим только *капитальным* ремонтам (опуская иногда слово “капитальный”). Они проводятся относительно редко и требуют порой значительных затрат, зато после каждого такого ремонта технико-экономические показатели машины заметно улучшаются, хотя и остаются хуже, чем у машины в новом состоянии. Периоды от ввода в эксплуатацию до первого ремонта, от одного ремонта до следующего ремонта или прекращения эксплуатации называются *межремонтными циклами*.

Рыночную стоимость имущества обычно понимают как сумму, за которую состоялся бы обмен имущества на дату оценки в сделке между заинтересованным покупателем и заинтересованным продавцом, при которой каждая из сторон действовала бы, будучи хорошо осведомленной, расчетливо и без принуждения [4]. В общем случае машины могут эксплуатироваться и утилизироваться разными способами. Однако рыночная стоимость машины оценивается в предположении, что способ эксплуатации и утилизации машины будет наиболее эффективным, приводящим к наибольшей величине стоимости (принцип НЭИ, [4, 5]). Момент, когда применять машину для производства продукции становится неэффективным, определяет *рациональный срок ее службы*. Рациональные сроки службы машин не слишком велики. Их значения для многих видов машин приводятся в оценочной литературе, например, в [6, 7, 8]. Кроме того, об их величине часто судят по тому, в какую амортизационную группу (согласно [9]) отнесены машины. Поэтому мы будем считать такие сроки известными.

В конце рационального срока службы машину нужно *утилизировать* – передать в сферу вторичного использования. При утилизации владелец машины получает определенные доходы и несет некоторые расходы. Разность между ними – это утилизационное сальдо машины, которое может быть как положительным, так и отрицательным. Утилизационное сальдо, отвечающее наиболее эффективному способу утилизации машины, будет ее *утилизационной стоимостью (salvage value)*. Обычно она составляет 4-9% от стоимости машины в новом состоянии.

Рыночная стоимость машины зависит от ее технического состояния. Рыночная стоимость машины в новом состоянии называется ее восстановительной стоимостью (ВС). Она определяется по данным о ценах первичного рынка, и мы считаем ее известной величиной. У подержанной машины рыночная стоимость меньше восстановительной. Разность этих стоимостей оценщики называют *износом (depreciation)*, а их отношение мы называем *коэффициентом годности*<sup>3</sup>. В [5, 6, 7, 8] и других источниках приводятся таблицы или формулы, позволяющие рассчитать такие коэффициенты для машин разных видов, а затем оценить стоимость подержанной машины как произведение ее ВС на соответствующий коэффициент. Такой метод предполагает, что коэффициенты годности стабильны (слабо зависят от даты оценки). Однако, как показано в [1, 2], многие из указанных таблиц и формул некорректны, поскольку они неадекватно учитывают физический износ (ухудшение технико-экономических показателей машины в процессе нормальной эксплуатации) и не ориентированы на наиболее эффективное использование (НЭИ, см. ниже) машины. Кроме того, они не учитывают увеличения стоимости машины после проведения ремонтов. Поэтому значение стоимости, полученное указанным методом, оценщики экспертно корректируют с учетом информации о техническом состоянии машины на дату оценки.

Для оценки имущества оценщики применяют и другой метод, получивший название метода дисконтированных денежных потоков (ДДП, Discounted Cash Flow, DCF). Здесь стоимость машины оценивается исходя из того потока выгод, который она будет приносить в будущем, а именно – как их дисконтированная сумма за оставшийся срок службы<sup>4</sup>. Этим

---

<sup>3</sup> В США их выражают в процентах и именуют Percent Good Factor. Публикуемые значения этих оценщики-ассессоры применяют при оценке имущества в целях налогообложения. Российские оценщики обычно используют проценты износа, дополняющие проценты годности до 100%.

<sup>4</sup> Применяя этот метод, оценщики оперируют как доналоговыми, так и с посленалоговыми выгодами, дисконтируя их по соответствующим ставкам.

методом, в принципе, можно учесть последствия предстоящих ремонтов, хотя этого обычно не делается.

Поскольку прямой учет влияния ремонтов на стоимость машин не находит широкого применения в оценочной практике, то и предложений по такому учету довольно мало. Для авторов из развитых стран эта тематика, по-видимому, неинтересна, поскольку владельцы машин в этих странах ориентированы, в основном, на ускоренную замену старой техники, а не на продление сроков ее службы. Российские оценщики также не уделяют должного внимания этой проблеме (как и другим, требующим проведения фундаментальных исследований). Однако известны три предложенные российскими оценщиками методики оценки машин, прямо учитывающие влияние ремонтов. Одна из них изложена в учебнике [5, раздел 3.2], две другие – в статьях [10, 11]. Все они ориентированы только на оценку машин, состояние которых однозначно определяется их возрастом. В частности, предполагается, что для этих машин ранее соблюдалась и будет соблюдаться “нормативная” периодичность ремонтов, а их возраст не превышает рационального (“нормативного”) срока службы. Эти методики нельзя рекомендовать для практической оценки и по другой причине: они, по сути, ориентированы на такой способ использования машин, который заведомо не является наиболее эффективным. Дело в том, что при вытекающей из этих методик зависимости стоимости машины от возраста принимаемый в расчет срок службы машины заведомо не является рациональным (применительно к первой методике это показано в [1,2], аналогично анализируются две других). Наконец, если методика [10] учитывает, что прирост стоимости машины после ремонта равен стоимости ремонта (см. ниже, раздел 3), то в двух других этот прирост задается экспертно устанавливаемым процентом, никак не связанным со стоимостью ремонта.

Далее, опираясь на метод ДДП (хотя и не в традиционной его версии), мы предложим новый метод оценки, лишенный указанных недостатков. В отличие от известных, он прямо ориентирован на наиболее эффективный способ использования машин и, в частности, предусматривает оптимизацию *срока службы* машины и *сроков проведения ремонтов*<sup>5</sup>. Кроме того, этот метод позволяет оценивать стоимость машины, возраст которой превышает рациональный срок службы (в известных методах оценки стоимость такой машины считается равной или близкой к ее утилизационной стоимости).

---

<sup>5</sup> Во многих публикациях оптимальная политика ремонтов ищется по критерию минимальных суммарных или удельных затрат на ремонт. При этом не учитывается, что затраты на ремонт снижают затраты на последующую эксплуатацию машины.

## 2. Описание состояния машины

Далее мы будем иметь дело только с машинами одной и той же марки и рассматривать их только на дату оценки и ближайшую к ней перспективу, не оговаривая это каждый раз.

Как уже говорилось, стоимость машины определяется ее состоянием. Поэтому для построения искомой модели необходимо описать это состояние какими-то характеристиками. На практике оценщики учитывают много характеристик оцениваемой машины, однако такой учет основан лишь на экспертных оценках. Что же касается таблиц и формул для определения коэффициентов годности, то они учитывают только одну характеристику состояния машины – ее возраст. Однако, если машина до даты оценки работала в иных (например, в более тяжелых) условиях, то она по своему состоянию будет отличаться от других машин того же возраста. Учитывая это, оценщики иногда характеризуют машину иным показателем – *эффективным* возрастом. Его можно определить как возраст машины, которая все время эксплуатировалась рационально и на дату оценки находится в том же состоянии, что и оцениваемая. Известны два метода оценки эффективного возраста машин.

*Первый* метод “обращен в прошлое”: берется хронологический возраст машины и корректируется с учетом отличий условий ее предшествующей эксплуатации от типичных. Способ такой корректировки изложен, например, в [5]. Однако он требует достаточно подробной информации об “истории” функционирования машины, которой у оценщика обычно нет.

*Второй* метод, наоборот, “обращен в будущее”. Он исходит из того, что оценщик (сам или с привлечением технических специалистов) может экспертно оценить оставшийся срок службы машины. Это позволяет приравнять оцениваемую машину (по ее состоянию и стоимости) к рационально эксплуатировавшейся машине с таким же оставшимся сроком службы. Тогда эффективный возраст оцениваемой машины можно найти, вычитая оставшийся срок ее службы из рационального.

Эффективный возраст точнее характеризует состояние машины, поэтому при установлении коэффициентов годности лучше ориентироваться на эффективный, а не хронологический возраст, что подчеркивается и в [7, 8]. Однако оценить эту характеристику сложнее, а с ее применением также связаны проблемы.

Представим, к примеру, машину, которая рационально использовалась в течение всего рационального срока службы, но в конце его была не утилизирована, а отремонтирована. На дату оценки она пригодна к дальнейшей эксплуатации, но ее эффективный возраст превышает рациональный срок службы. Тогда, в соответствии с известными

методиками или таблицами, ее стоимость не может превышать утилизационную, что на самом деле не так.

Это означает, что для учета особенностей ремонтируемых машин одной характеристики – возраста – недостаточно. Поскольку после ремонта состояние машины скачкообразно улучшается, нам потребуется другая характеристика состояния машины, которая также должна скачкообразно меняться после ремонта. В качестве такой характеристики выберем *эффективное время работы машины в текущем межремонтном цикле* (ЭВЦ). Установить ЭВЦ можно по аналогии с эффективным возрастом: либо корректируя хронологическое время работы машины в этом цикле, либо уменьшая рациональную длительность этого цикла на экспертно оцениваемое время работы до конца цикла. Вместе с тем, для оценки ЭВЦ необходима информация не обо всей, а только о “недавней” истории функционирования машины. Отметим, что ЭВЦ может отличаться от возраста машины даже в первом межремонтном цикле. Так будет, если до даты оценки она эксплуатировалась нерационально.

Таким образом, мы будем характеризовать состояние машины на дату оценки сочетанием двух величин – возраста ( $t$ ) и ЭВЦ ( $s$ ). При этом стоимость машины и интенсивность *доналоговых* выгод от ее функционирования по своему назначению на дату оценки будем рассматривать как функции соответственно  $K(t,s)$  и  $B(t,s)$ . Естественно принять, что обе они – не возрастают по каждому аргументу. Чтобы исключить ситуации, когда  $B(t,s)$  убывает слишком медленно, примем, что существует некоторый “критический” возраст  $M$  такой, что  $B(t,s) < rU$  для всех  $t > M$ . Заметим, кстати, что представление стоимости машины как функции  $K(t,s)$  подразумевает наличие рынка, где обращаются (реальные или виртуальные, но не обязательно стандартные) машины с разными сочетаниями  $(t,s)$  возраста и ЭВЦ. Стоимость ремонта машины, имеющей возраст  $t$  и ЭВЦ= $s$ , обозначим через  $P(t,s)$ . Эту функцию будем считать возрастающей по своим аргументам.

Восстановительная стоимость машины, т.е. стоимость машины в новом состоянии в этих обозначениях будет равна  $K(0,0)$ . Коэффициент годности машины, имеющей возраст  $t$  и ЭВЦ= $s$ , будет при этом равен  $K(t,s)/K(0,0)$  и обозначаться через  $k(t,s)$ . Функцию  $k(t,s)$  будем считать стабильной.

### 3. Основное уравнение

При построении модели мы будем опираться на следующее положение, лежащее в основе метода ДДП – **принцип дисконтирования**:

Стоимость имущества на дату оценки =  
= сумма дисконтированных выгод от наиболее эффективного использования имущества в течение некоторого периода +

+дисконтированная стоимость имущества в конце периода.

Далее будут рассматриваться разные машины одной марки на дату оценки и ближайшее к ней время. Предполагается, что в этом периоде в системе управления эксплуатацией машин в отношении каждой из них может быть принято одно из трех решений: 1) продолжить ее (нормальное) использование по своему функциональному назначению, 2) произвести ремонт, 3) утилизировать. В таком случае актуальной становится задача установления правила выбора оптимального решения в зависимости от возраста и ЭВЦ машины. Естественно, что стоимости машин на дату оценки должны оцениваться применительно к такому правилу.

Рассмотрим машину, для которой оптимальным решением будет немедленный (на дату оценки) ремонт. Применяв принцип дисконтирования к периоду проведения ремонта и пренебрегая длительностью этого периода (а она обычно невелика), мы получим, что **стоимости машины до и после ремонта отличаются на стоимость ремонта**. Как отмечалось выше, с этим согласны не все оценщики.

Переходя к более общему случаю, будем пока считать, что инфляция и налоги отсутствуют. Зафиксируем  $t$  и  $s$  и будем рассматривать машину, имеющую на дату оценки возраст  $t$  и ЭВЦ= $s$ . Возьмем произвольное  $x \geq 0$  и допустим, что наша машина используется по своему назначению, не проходя ремонта, в течение времени  $x$ . Тогда она превратится в машину, имеющую возраст  $t+x$  и ЭВЦ= $s+x$ . Если бы машина с таким же возрастом и ЭВЦ, появилась на рынке *на дату оценки*, ее НЭИ могло бы предусматривать либо продолжение, либо прекращение текущего межремонтного цикла. Очевидно, что вторая ситуация (т.е. немедленный ремонт или утилизация) возникнет, если  $x$  достаточно велико. Пусть  $X=X(t,s)$  – наименьшее из таких  $x \geq 0$ .

Предположим пока, что  $X > 0$ . Тогда при любом  $0 \leq x < X$  машину, имеющую возраст  $t+x$  и ЭВЦ= $s+x$ , наиболее эффективно эксплуатировать по своему назначению в течение малого периода времени  $dx$ , и в конце этого периода ее возраст составит  $t+x+dx$ , а ЭВЦ –  $s+x+dx$ . При *отсутствии инфляции* стоимость такой машины будет выражаться той же самой функцией от возраста и ЭВЦ и потому составит  $K(t+x+dx, s+x+dx)$ . Но тогда принцип дисконтирования дает:

$$K(t+x, s+x) \approx B(t+x, s+x)dx + e^{-rdx} K(t+x+dx, s+x+dx). \quad (1)$$

При  $x=0$  формула (1) дает:

$$B(t,s) \approx [K(t,s) - K(t+dx, s+dx)] \frac{e^{-rdx}}{dx} + K(t,s) \frac{1 - e^{-rdx}}{dx}.$$

Поскольку функция  $K(t,s)$  убывает по  $t$  и  $s$ , выражение в квадратных скобках здесь неотрицательно. Кроме того,  $K(t,s) \geq U$ , а дробь в последнем члене стремится к  $r$  при  $dx \rightarrow 0$ . Но тогда из полученного равенства следует, что  $B(t,s) \geq rU$ . Это означает, что любая машина, не подлежащая немедленному ремонту или утилизации, должна иметь возраст, не превышающий “критического” возраста  $M$ , определенного выше.

Вернемся теперь к равенству (1) и преобразуем его так:

$$0 \approx K(t+x+dx, s+x+dx)e^{-r(x+dx)} - K(t+x, s+x)e^{-rx} + B(t+x, s+x)e^{-rx} dx = d \left[ K(t+x, s+x)e^{-rx} \right] + B(t+x, s+x)e^{-rx} dx.$$

Интегрируя это равенство по  $x$  в пределах от 0 до  $X$ , получаем:

$$0 = K(t+X, s+X)e^{-rX} - K(t,s) + \int_0^X B(t+x, s+x)e^{-rx} dx.$$

Входящая сюда стоимость  $K(t+X, s+X)$  относится к машине, имеющей возраст  $t+X$  и ЭВЦ  $=s+X$ . Но, по определению  $X$ , такая машина требует либо утилизации, либо ремонта. Сравним оба варианта. В первом машина имеет утилизационную стоимость  $U$ . При втором варианте после ремонта (а он предполагается мгновенным) машина будет иметь тот же возраст  $t+X$ , ЭВЦ  $=0$  и стоимость  $K(t+X, 0)$ . До ремонта стоимость этой машины будет меньше на стоимость ремонта, т.е. составит  $K(t+X, 0) - P(t+X, s+X)$ . Наиболее эффективному способу использования машины отвечает вариант с большей стоимостью, поэтому

$$K(t+X, s+X) = \max \{ K(t+X, 0) - P(t+X, s+X); U \}.$$

Подставив это в предыдущее равенство, найдем:

$$K(t,s) = \int_0^X B(t+x, s+x)e^{-rx} dx + \max [ K(t+X, 0) - P(t+X, s+X); U ] e^{-rX}. \quad (2)$$

Выше мы предполагали, что  $X > 0$ . Однако очевидно, что равенство (2) справедливо и при  $X = X(t,s) = 0$ .

Как и модели из [1-3], полученная модель имеет важную особенность. В традиционной версии метода ДДП стоимость машины определяется выгодами от *последующего* использования именно этой машины. В модели (2) ситуация иная: стоимость машины определяется *текущими* (относящимися только к дате оценки) стоимостями *других*, более старых машин и интенсивностями выгод от их эксплуатации.

До сих пор мы рассматривали нереальный частный случай отсутствия инфляции и налогов. Однако, используя тот же прием, что и в [1,2], можно показать, что равенство (2) останется справедливым и в общем случае с

той лишь разницей, что доналоговая ставка дисконтирования заменится другой, “особой”, учитывающей и темпы инфляции и ставки налогов на прибыль и на имущество. Поэтому далее мы будем опираться на формулу (2), не меняя обозначения ставки дисконтирования.

Учтем теперь, что значение  $X=X(t,s)$  отвечает НЭИ. Поэтому ему отвечает наибольшее значение стоимости, т.е. максимум правой части (2):

$$K(t,s) = \max_{X \geq 0} \left\{ \int_0^X B(t+x, s+x) e^{-rx} dx + \right. \\ \left. + \max [K(t+X, 0) - P(t+X, s+X); U] e^{-rX} \right\}. \quad (3)$$

При ЭВЦ=0 эта формула дает:

$$K(t,0) = \max_{X \geq 0} \left\{ \int_0^X B(t+x, x) e^{-rx} dx + \right. \\ \left. + \max [K(t+X, 0) - P(t+X, X); U] e^{-rX} \right\}. \quad (4)$$

Мы получили уравнение для функции одного переменного, типичное для задач динамического программирования, и оно может быть решено численными методами (например, методом последовательных приближений). Установим некоторые свойства этого решения. При этом то значение  $X=X(t,0)$ , при котором достигается максимум в правой части (4), будем для краткости обозначать через  $X^t$ .

Обозначим через  $D$  множество таких неотрицательных  $t$ , для которых  $X^t > 0, K(t+X^t, 0) - P(t+X^t, X^t) > U$ . Очевидно, что если  $t \notin D$ , то

$$K(t,0) = \max_{X \geq 0} \left\{ \int_0^X B(t+x, s) e^{-rx} dx + U e^{-rX} \right\}. \text{ Пусть теперь } t \in D. \text{ Тогда в силу}$$

(4) и учитывая, что функции  $B(t,s)$  и  $K(t,0)$  не возрастающие, а функция  $P(t,s)$  – неубывающая, имеем:

$$K(t,0) = \int_0^{X^t} B(t+x, x) e^{-rx} dx + [K(t+X^t, 0) - P(t+X^t, X^t)] e^{-rX^t} < \\ < B(0,0) \frac{1 - e^{-rX^t}}{r} + K(t,0) - P(0,0) e^{-rX^t}.$$

$$\text{Отсюда следует, что } X(t,0) = X^t \geq \frac{1}{r} \ln \left[ 1 + \frac{rP(0,0)}{B(0,0)} \right] = Y > 0.$$

Возьмем теперь произвольное  $t$  и образуем последовательности  $\{S_i\}$ ,  $\{X_i\}$  и  $\{T_i\}$  с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$S_0 = t; X_i = X(S_{i-1}, 0); S_{i+1} = S_i + X_{i+1}; T_i = S_i - t, (i \geq 0).$$

Докажем, что найдется  $S_i \notin D$ . Действительно, в противном случае было бы  $S_{i+1} - S_i > Y$  при всех  $i$ , а тогда нашлось бы  $S_m > M$ . Но машины возраста свыше  $M$  подлежат утилизации, так что  $X(S_m, 0) = 0$  и  $S_m \notin D$ .

Пусть  $S_{n-1}$  – первый элемент последовательности, не принадлежащий  $D$ . Тогда, учитывая, что  $X_i = T_i - T_{i-1}$ , равенство (4) можно записать так:

$$K(S_{i-1}, 0)e^{-rT_{i-1}} = \int_0^{T_i - T_{i-1}} B(S_{i-1} + x, x)e^{-r(T_{i-1} + x)} dx + \begin{cases} [K(S_i, 0) - P(S_i, T_i - T_{i-1})]e^{-rT_i} & \text{при } 1 \leq i < n; \\ Ue^{-rT_n} & \text{при } i = n. \end{cases}$$

Просуммировав эти равенства для  $i=1, \dots, n$ , сократив подобные члены и учитывая, что  $K(S_0, 0) = K(t, 0)$ , получим:

$$K(t, 0) = \sum_{i=1}^n \int_0^{T_i - T_{i-1}} B(t + T_{i-1} + x, x)e^{-r(T_{i-1} + x)} dx - \sum_{i=1}^{n-1} P(t + T_i, T_i - T_{i-1})e^{-rT_i} + Ue^{-rT_n}.$$

Левая часть здесь равна правой только при оптимальных значениях  $n$  и  $T_i$ , в противном случае она может быть и больше, следовательно:

$$K(t, 0) = \max_{n \geq 1, T_n > \dots > T_1 \geq 0} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{T_{i+1} - T_i} B(t + T_i + x, x)e^{-r(T_i + x)} dx - \sum_{i=1}^{n-1} P(t + T_i, T_{i+1} - T_i)e^{-rT_i} + Ue^{-rT_n} \right\}. \quad (5)$$

Естественно, что при этом сумма, в которой верхний предел меньше нижнего, считается нулевой, а величина  $T_0$  считается равной нулю.

Используя формулу (5), найдем  $K(t+X, 0)$  и подставим полученное выражение в (3). При этом оказывается удобным заменить  $n$  на  $n-1$ ,  $X$  на  $T_1$ , а  $T_i$  на  $T_{i+1}$ . Кроме того, учтем, что стоимость первого ремонта в (5) равна  $P(t + T_1, T_1 - T_0) = P(t + T_1, T_1)$ , а в формуле (3) она иная –  $P(t + T_1, s + T_1)$ .

Для упрощения получающегося выражения обозначим  $\chi_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i > 1. \end{cases}$

Тогда после простых преобразований получим:

$$K(t, s) = \max_{n \geq 1, T_n > \dots > T_1 \geq 0} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{T_{i+1} - T_i} B(t + T_i + x, s\chi_{i+1} + x)e^{-r(T_i + x)} dx - \sum_{i=1}^{n-1} P(t + T_i, s\chi_i + T_i - T_{i-1})e^{-rT_i} + Ue^{-rT_n} \right\}. \quad (6)$$

В обеих полученных формулах величина  $n-1$  может трактоваться как ожидаемое количество предстоящих ремонтов машины,  $T_i$  – как ожидаемый срок от даты оценки до завершения  $i$ -го межремонтного цикла ( $T_0=0$ ), а  $T_i - T_{i-1}$  – как ожидаемая оставшаяся длительность этого цикла<sup>6</sup>.

Чтобы воспользоваться этими формулами, надо знать, как именно влияют возраст и ЭВЦ машины на интенсивность выгод от наиболее эффективного ее использования. Между тем, в большинстве случаев такие выгоды непосредственно не измеримы. Возможный выход из положения предлагается в следующем разделе.

#### 4. Моделирование влияния устранимого и неустраимого износов

Как уже отмечалось, под износом оценщики понимают снижение стоимости машины против ее восстановительной стоимости. Оценивая износ машины, оценщики нередко подразделяют его на устранимый (curable) и неустраимый (incurable), в зависимости от того, можно ли экономически эффективно устранить его последствия (путем надлежащего ремонта). Однако теоретически обоснованных методов такого разделения пока нет, поскольку неясно, как именно влияет возраст (или эффективный возраст) на соответствующие части указанного уменьшения стоимости.

Многие оценщики считают, что снижение стоимости машины за счет устранимого износа равно стоимости ремонта. Однако они встают в тупик, если спросить их, о каком ремонте идет речь – предстоящем или предыдущем. Если имеется в виду ремонт, произведенный в начале цикла, то в первом цикле вообще не должно быть устранимого износа. Если же имеется в виду ремонт, проводимый в конце цикла, то тогда не должно быть устранимого износа в последнем цикле (это не говоря уже о том, что увязывание текущих темпов износа со стоимостью предстоящего в будущем ремонта наделяет машину даром предвидения). Более того, есть машины, ремонт которых возможен, но неэффективен, однако это не означает, что они не подвергаются устранимому износу. Поэтому мы будем моделировать влияние устранимого износа не на стоимость машины, а на интенсивность приносимых ею выгод.

Рассмотрим машину в *первом* межремонтном цикле, которая наиболее эффективно использовалась до достижения возраста  $t$ . Пусть  $B(t)$  – интенсивность выгод от ее эксплуатации. Тогда для машины в новом

---

<sup>6</sup> Данная модель не позволяет оценивать или прогнозировать «настоящие» длительности предстоящих межремонтных циклов, ибо описывает использование машины только в малом отрезке времени. Однако, зная, например, что машина, достигшая на дату оценки возраста  $T_1$  лет, должна быть отремонтирована, можно *ожидать*, что и наша машина будет отремонтирована в этом возрасте.

состоянии эта интенсивность составит  $B(0)$ . Уменьшение  $J(t) = B(0) - B(t)$  естественно связать с физическим износом машины. Однако в первом межремонтном цикле разделить влияние устранимого и неустраняемого физических износов невозможно, поскольку машина ранее не ремонтировалась. Это позволяет считать, что оба вида износа представляют собой “доли” одного, общего износа машины, а характер влияния каждого из износов на интенсивность приносимых ею выгод – один и тот же. Другими словами, в общем уменьшении интенсивности выгод  $J(t)$  есть некоторая доля  $q$ , обусловленная неустраняемым износом, и дополнительная доля  $1-q$ , обусловленная устранимым износом. В таком случае зависимость интенсивности выгод от возраста можно представить в следующем виде:

$$B(t) = B(0) - qJ(t) - (1 - q)J(t).$$

Возьмем теперь машину того же возраста, которая прошла ремонт раньше и наиболее эффективно использовалась во втором цикле в течение некоторого времени  $s$ . Ее неустраняемый износ, а он зависит только от возраста машины, будет тем же самым, поэтому второй член формулы не изменится. Однако устранимый износ этой машины “начался сначала” после проведенного ремонта. Естественно считать, что по этой причине третий член формулы будет таким же, как и у машины, которая наиболее эффективно эксплуатировалась в первом цикле в течение того же времени  $s$ . Другими словами, хронологический возраст в последнем члене формулы поменяется на время работы машины после ремонта. Если к тому же учесть, что после ремонта машина могла работать с разной загрузкой или в разных условиях, то это время надо будет поменять на “эффективное”, т.е. на ЭВЦ. Эти рассуждения позволяют предложить следующую модель зависимости интенсивности выгод от возраста ( $t$ ) и ЭВЦ ( $s$ ) машины:

$$B(t, s) = B(0) - qJ(t) - (1 - q)J(s).$$

Обозначив  $f(t) = B(0) - J(t) - rU$ , эту формулу можно упростить:

$$B(t, s) = qf(t) + (1 - q)f(s) + rU. \quad (7)$$

Обратим внимание, что в рассматриваемой модели функция  $J(t)$  – возрастающая, так что  $f(t)$  – убывающая и положительная при малых  $t$ .

Перейдем теперь к рассмотрению стоимости ремонта, опираясь при этом на анализ, проведенный в [12, разд. 3.2]. С технической точки зрения ремонт представляет собой совокупность ряда операций, включая чистку, разборку, диагностику, исправление или замену отдельных узлов и деталей, сборку, тестирование и т.п. Одни из этих операций не зависят, а другие – зависят от технического состояния ремонтируемой машины. Им отвечают соответственно постоянная и переменная части стоимости

ремонта. Постоянную часть обозначим через  $P$ . Переменная же часть отражает, главным образом, стоимость ремонта или замены отдельных ее относительно “короткоживущих” деталей или узлов. Очевидно, что объем таких операций будет тем больше, чем больше была длительность предшествующего межремонтного цикла. Это позволяет предложить следующую модель стоимости ремонта:

$$P(t, s) = P + \Psi s, \quad (8)$$

где  $\Psi$  – прирост стоимости ремонта за 1 год увеличения ЭВЦ.

Подставив (7) и (8) в (6), после ряда простых преобразований получаем следующее уравнение для определения стоимости машин:

$$K(t, s) = U + \max_{n \geq 1, T_n > \dots > T_1 \geq 0} \left\{ q \int_0^{T_n} f(t+x) e^{-rx} dx + \right. \\ \left. + (1-q) \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{T_{i+1}-T_i} f(s\chi_{i+1} + x) e^{-r(T_i+x)} dx - \sum_{i=1}^{n-1} [P + \Psi(s\chi_i + T_i - T_{i-1})] e^{-rT_i} \right\}. \quad (9)$$

Практически удобно вначале находить оптимальные  $T_i$  при фиксированном  $n$ , а затем искать оптимальное  $n$ . Для этого обозначим:

$$V_n(t, s) = \max_{T_n > \dots > T_1 \geq 0} \left\{ q \int_0^{T_n} f(t+x) e^{-rx} dx + \right. \\ \left. + (1-q) \sum_{i=1}^n \int_0^{T_i-T_{i-1}} f(s\chi_i + x) e^{-r(T_{i-1}+x)} dx - \sum_{i=1}^{n-1} [P + \Psi(s\chi_i + T_i - T_{i-1})] e^{-rT_i} \right\}. \quad (10)$$

Тогда (9) можно представить в следующем виде:

$$K(t, s) = \max_{n \geq 1} V_n(t, s) + U. \quad (11)$$

При  $n=1$  имеем:

$$V_1(t, s) = \max_{T_1 \geq 0} \int_0^{T_1} [qf(t+x) + (1-q)f(s+x)] e^{-rx} dx.$$

Под знаком интеграла в квадратной скобке стоит убывающая функция от  $x$ , поэтому, если в точке 0 она положительна, то максимум будет достигаться, когда  $T_1$  будет ее корнем, а в противном случае – при  $T_1=0$ .

В случаях, когда  $n > 1$ , все  $T_i$  должны быть положительны. Поэтому оптимальные их значения можно найти, приравняв нулю производные  $V_n$  по  $T_i$  и решив полученную систему уравнений. Эти уравнения соответственно для  $i=1, 2 \leq i < n, i=n$ , следующие:

$$\begin{aligned}
& (1-q)f(s+T_1)e^{-rT_1} - (1-q)f(T_2-T_1)e^{-rT_1} - r \int_0^{T_2-T_1} f(x)e^{-r(T_1+x)} dx - \\
& \quad - \Psi e^{-rT_1} + r[P + \Psi(s+T_1)]e^{-rT_1} + \Psi e^{-rT_2} = 0; \\
& (1-q)f(T_i-T_{i-1})e^{-rT_i} - (1-q)f(T_{i+1}-T_i)e^{-rT_i} - \\
& -r \int_0^{T_{i+1}-T_i} f(x)e^{-r(T_i+x)} dx - \Psi e^{-rT_i} + r[P + \Psi(T_i-T_{i-1})]e^{-rT_i} + \Psi e^{-rT_{i+1}} = 0; \\
& \quad qf(t+T_n)e^{-rT_n} + (1-q)f(T_n)e^{-rT_n} = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Исследовать полученную модель удастся лишь при  $r=0$ . Поскольку обычно реальные ставки дисконтирования не превосходят 4-8% годовых, при таком допущении коэффициенты годности меняются незначительно. Это подтверждается и экспериментальными численными расчетами.

### 5. Случай нулевой ставки дисконтирования

Если  $r=0$ , то при  $n=1$  и  $n>1$  из (10) получаем:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \max_{T_1 \geq 0} \left\{ q \int_0^{T_1} f(t+x) dx + (1-q) \int_0^{T_1} f(s+x) dx \right\}; \\
V_n(t,s) &= \max_{T_n > \dots > T_1 \geq 0} \left\{ q \int_0^{T_n} f(t+x) dx + (1-q) \int_0^{T_1} f(s+x) dx + \right. \\
& \left. + (1-q) \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{T_{i+1}-T_i} f(x) dx - (n-1)P - \Psi(T_{n-1}+s) \right\}, \quad (n > 1).
\end{aligned} \tag{13}$$

Предположим, что оцениваемая машина не требует немедленного ремонта, а оптимальное значение  $n$  нам известно.

Пусть вначале  $n=1$ . Тогда  $V_1 = \max_{T_1 \geq 0} \int_0^{T_1} [qf(t+x) + (1-q)f(s+x)] dx$ . Под

знаком интеграла здесь стоит убывающая функция от  $x$ , поэтому оптимальное  $T_1$  будет корнем этой функции, если он положителен, и нулем в противном случае. Рассмотрим, в частности, машину, только что прошедшую ремонт. У этой машины  $s=0$  и ее стоимость будет превышать утилизационную, если выполняется неравенство  $qf(t) + (1-q)f(0) > 0$ . Отсюда можно найти и “критический” возраст машины – он будет корнем уравнения  $qf(t) + (1-q)f(0) = 0$ .

Если же  $n > 1$ , то все оптимальные  $T_i$  должны быть положительны, а производные от  $V_n$  по  $T_i$  должны обратиться в нуль. Отсюда вытекает, что:

$$\begin{aligned} (1-q)f(s+T_1) - (1-q)f(T_2-T_1) &= 0; \\ (1-q)f(T_i-T_{i-1}) - (1-q)f(T_{i+1}-T_i) &= 0, \quad (1 < i < n-1); \\ (1-q)f(T_{n-1}-T_{n-2}) - (1-q)f(T_n-T_{n-1}) - \Psi &= 0; \\ qf(t+T_n) + (1-q)f(T_n-T_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Но функция  $f(t)$  – убывающая, поэтому два первых равенства могут выполняться только если  $s+T_1 = T_2-T_1 = \dots = T_{n-1}-T_{n-2}$ . Отсюда прежде всего вытекает, что величины  $X_2, \dots, X_{n-1}$  – ожидаемые длительности последующих межремонтных циклов – равны между собой. Пусть  $X$  – их общее значение. Далее, из полученных равенств следует, что ожидаемая длительность первого межремонтного цикла  $T_1 = X-s$ , так что  $X > s$ . Тогда при всех  $i < n$  имеем:  $T_i = iX-s$ . Отсюда и из (14) получаем уравнения для определения неизвестных  $T_n$  и  $X$ :

$$\begin{aligned} f(X) - f(T_n - (n-1)X + s) - \Psi/(1-q) &= 0; \\ qf(t+T_n) + (1-q)f(X) - \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку функция  $f(t)$  – убывающая, из первого уравнения следует, что длительность последнего цикла больше  $X$ . С “технической” точки зрения это означает, что в последнем цикле машина работает “на износ”.

Заметим теперь, что рассматриваемая машина потребует немедленного ремонта, если величина  $T_1 = X-s$  окажется нулевой или отрицательной, т.е. при  $X \leq s$ . Будем поэтому считать, что данное неравенство не выполняется.

Выясним теперь, как меняются  $T_n$  и  $X$  при небольших изменениях  $t$  и  $s$ . Для этого обозначим через  $f^{-1}$  (убывающую) функцию, обратную к  $f$ , и, выразив  $t$  и  $s$  из (15), получим:

$$t-s = f^{-1}\left(\frac{\Psi}{q} - \frac{1-q}{q}f(X)\right) - f^{-1}\left(f(X) - \frac{\Psi}{1-q}\right) - (n-1)X. \quad (16)$$

Нетрудно убедиться, что справа здесь стоит убывающая функция от  $X$ . Это значит, что с увеличением разности  $t-s$  величина  $X$  возрастает.

Ожидаемый (полный) срок службы машины  $T_n + t = f^{-1}\left(\frac{\Psi}{q} - \frac{1-q}{q}f(X)\right)$  при этом уменьшится, а ожидаемая длительность последнего межремонтного цикла  $T_n - (n-1)X + s = f^{-1}\left(f(X) - \frac{\Psi}{1-q}\right)$  – увеличится.

Если же какое-то время машина будет нормально использоваться по своему назначению, то за этот период разность  $t-s$  не изменится.

Соответственно не изменятся ни ожидаемый срок службы машины, ни длительность последнего межремонтного цикла.

Заметим теперь, что правая часть (16) является убывающей функцией как от  $X$ , так и от  $\Psi$ . Поэтому с ростом  $\Psi$  величина  $X$  должна убывать. Чтобы выяснить, как при этом меняется ожидаемый оставшийся срок службы машины  $T_n$ , заметим, что  $qf(t+T_n) + (1-q)f(T_n - (n-1)X + s) = 0$  в силу (15). Выражение, стоящее здесь слева, растет с ростом  $X$  и убывает с ростом  $T_n$ . Поэтому данное равенство определяет  $T_n$  как возрастающую функцию от  $X$ . Но с ростом  $\Psi$  величина  $X$  убывает, значит,  $T_n$  тоже убывает. Естественно, что при этом будет убывать и  $T_n - (n-1)X + s$  – ожидаемая длительность последнего межремонтного цикла. Мы выяснили, таким образом, что с увеличением ставки «переменных» затрат на ремонт машины будут уменьшаться ожидаемые длительности всех межремонтных циклов и ожидаемый оставшийся срок службы машины.

Учитывая, что  $T_i = iX - s$  при  $i < n$ , систему (13) можно немного упростить:

$$V_1(t, s) = \max_{T_1 \geq 0} \left\{ q \int_t^{t+T_1} f(x) dx + (1-q) \int_s^{s+T_1} f(x) dx \right\};$$

$$V_n(t, s) = \max_{X > s, T_n > (n-1)X - s} \left\{ q \int_t^{t+T_n} f(x) dx + (1-q) \int_0^{T_n - (n-1)X + s} f(x) dx - \right. \quad (17)$$

$$\left. - (1-q) \int_0^s f(x) dx + (n-1)(1-q) \int_0^X f(x) dx - (n-1)(P + \Psi X), \quad (n > 1) \right\}.$$

Получить аналитическое решение задачи удастся в частном случае, когда функция  $f$  – линейная:

$$f(x) = H(L - x). \quad (18)$$

Здесь  $H$  может трактоваться как масштабный параметр,  $L$  – как предельный срок использования машины по своему функциональному назначению при условии, что она в течение этого срока не ремонтируется.

*Примечание.* В рассматриваемом частном случае задача достаточно легко решается численными методами даже при ненулевой ставке дисконтирования ( $r$ ), поскольку интегралы в равенствах (3) и (4) легко вычисляются, и эти равенства становятся следующими рекуррентными соотношениями, пригодными для расчетов в EXCEL:

$$K(t, 0) = U + \max_{X \geq 0} \left\{ H(L - qt) \frac{1 - e^{-rX}}{r} - H \frac{1 - (1+rX)e^{-rX}}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \max [K(t + X, 0) - P - \Psi X - U; 0] e^{-rX} \right\}.$$

$$K(t,s) = U + \max_{X \geq 0} \left\{ H[L - qt - (1-q)s] \frac{1 - e^{-rX}}{r} - H \frac{1 - (1+rX)e^{-rX}}{r^2} + \right. \\ \left. + \max[K(t+X,0) - P - \Psi(s+X) - U; 0] e^{-rX} \right\}.$$

Исследуем решение данной задачи. При  $n=1$  из (17) легко получить, что  $T_1 = L - qt - (1-q)s$ . Тогда при  $qt + (1-q)s < L$  имеем:

$$V_1(t,s) = \frac{H}{2} \left\{ q(L-t)^2 + (1-q)(L-s)^2 - q(1-q)(t-s)^2 \right\} = \\ = \frac{H}{2} [L - qt - (1-q)s]^2. \quad (19)$$

Пусть теперь  $n > 1$ . Здесь система (15) принимает вид:

$$H(L-X) - H[L - T_n + (n-1)X - s] - \Psi/(1-q) = 0; \\ qH(L-t - T_n) + (1-q)H(L-X) - \Psi = 0.$$

Решая эту систему, можно найти сначала  $X$  и  $T_n$ , а затем – ожидаемые длительности межремонтных циклов, моменты их окончания и полный срок службы машины ( $T$ ). В результате получаем:

$$X = \frac{L - q(t-s) - \frac{\Psi}{H(1-q)}}{1 + q(n-1)}; \quad X_n = X + \frac{\Psi}{H(1-q)}; \quad (20)$$

$$T_1 = X - s; \quad T_n = X_n + (n-1)X - s; \quad T = T_n + t = X_n + (n-1)X + t - s.$$

Обратим внимание на то, что и ожидаемая длительность второго и следующих межремонтных циклов  $X$  и ожидаемый полный срок службы машины  $T$  зависят только от разности  $t-s$ . Отсюда вытекает, что:

- при изменении разности  $t-s$  ожидаемая периодичность предстоящих ремонтов машины изменяется. Грубо говоря, если машину использовали нерационально или провели ей ремонт слишком рано или слишком поздно, то график проведения последующих ремонтов должен быть изменен. Это лишний раз подтверждает нецелесообразность ориентации на нормы периодичности ремонтов как обязательные документы, хотя какое-то представление о рациональном графике ремонтов они дают;

- в период, когда машина используется наиболее эффективно по своему назначению, увеличивается ее возраст  $t$ , но точно на ту же величину возрастает и ее ЭВЦ  $s$ , так что разность  $t-s$  остается неизменной. Ожидаемая длительность последующих межремонтных циклов  $X$  не меняется, так что пересматривать график предстоящих ремонтов не надо.

Заметим теперь, что ожидаемая длительность первого межремонтного цикла равна  $X-s$ , так что должно выполняться неравенство  $X > s$ . С учетом (20) оно принимает следующий вид:

$$L - q(t - s) > \frac{\Psi}{H(1 - q)}. \quad (21)$$

Если эти ограничения выполняются, то  $V_n$  и стоимость машины  $K_n(t, s)$ , отвечающая  $n$  межремонтным циклам, находится из (11), (17) и (20):

$$K_n(t, s) = V_n(t, s) + U = \frac{nH \left[ L - q(t - s) - \frac{(n-1)\Psi}{nH} \right]^2}{2[1 + (n-1)q]} + \frac{(n-1)\Psi^2}{2nH(1-q)} - \quad (22)$$

$$-H \left[ L - q(t - s) \right] s + \frac{H}{2} s^2 - (n-1)P + U.$$

Нетрудно убедиться, что при  $n=1$  эта формула совпадает с (19).

Проведя расчеты по формуле (22) при разных  $n$ , можно найти и оптимальное количество межремонтных циклов, которому отвечает наибольшая стоимость машины. Но аналитически эта задача не решается.

Применим эти формулы к машине в новом состоянии, у которой  $t=s=0$ . Здесь неравенство (21) принимает вид:  $L > \frac{\Psi}{H(1-q)}$ , а формула (22) дает:

$$K_n = \frac{nH \left[ L - \frac{(n-1)\Psi}{nH} \right]^2}{2[1 + (n-1)q]} + \frac{(n-1)\Psi^2}{2nH(1-q)} - (n-1)P + U; \quad (23)$$

При этом ожидаемые длительности всех межремонтных циклов у этой машины<sup>7</sup> и ожидаемый полный срок ее службы, в силу (20), составляют:

$$X = \frac{L - \frac{\Psi}{H(1-q)}}{1 + q(n-1)}; \quad X_n = X + \frac{\Psi}{H(1-q)}; \quad T = \frac{nL - (n-1)\frac{\Psi}{H}}{1 + q(n-1)}. \quad (24)$$

Оптимальное количество межремонтных циклов  $n$  надо подобрать так, чтобы правая часть (23) была максимальной. Для решения этой задачи преобразуем (23) следующим образом:

$$K_n = \frac{1}{2q} \left[ HL^2 - 2L\Psi + \frac{1}{(1-q)H} \right] + U - (n-1)P - \frac{[(1-q)HL - \Psi]^2}{2q(1-q)[1 + (n-1)q]H}.$$

<sup>7</sup> Поскольку  $s=0$ , то ожидаемая длительность первого межремонтного цикла ( $X-s$ ) – такая же, как и второго ( $X$ ).

Обратим внимание, что от  $n$  в этом выражении зависят только два последних члена, причем эта зависимость – выпуклая, а ее локальный максимум одновременно является глобальным. Поэтому для нахождения оптимального  $n$  можно перебирать последовательно значения  $n=1, 2, \dots$  до тех пор, пока соответствующие значения  $K_n$  не начнут убывать.

Оценим теперь устранимый и неустрашимый износы машины в начале эксплуатации. Возьмем машину, которая от момента ввода в эксплуатацию до даты оценки проработала по своему назначению малое время  $t=s$ . В силу (22), для нее будет:

$$K_n(t, t) = \frac{nH \left[ L - \frac{(n-1)\Psi}{nH} \right]^2}{2[1 + (n-1)q]} + \frac{(n-1)\Psi^2}{2nH(1-q)} - HLt + \frac{H}{2}t^2 - (n-1)P + U.$$

Вычитая это из (23), мы увидим, что с точностью до малых более высокого порядка износ машины (в стоимостном выражении) составит  $HLt$ . Эта величина отражает как устранимый, так и неустрашимый износы.

Чтобы оценить только неустрашимый износ, рассмотрим другую машину, которая от момента ввода в эксплуатацию до даты оценки бездействовала (например, хранилась) в течение малого времени  $t$ . У этой машины  $s=0$ , и ее стоимость, в силу (22), составит:

$$K_n(t, 0) = \frac{nH \left[ L - qt - \frac{(n-1)\Psi}{nH} \right]^2}{2[1 + (n-1)q]} + \frac{(n-1)\Psi^2}{2nH(1-q)} - (n-1)P + U.$$

Вычитая это из (23), мы увидим, что с точностью до малых более высокого порядка неустрашимый износ машины (в стоимостном

выражении) составит  $\frac{nq \left( HL - \frac{n-1}{n}\Psi \right)}{[1 + (n-1)q]}t$ . Отсюда находится доля

неустрашимого износа в общем износе (в начале эксплуатации машины):

$$d_i = \frac{q}{1 + (n-1)q} \left( n - \frac{n-1}{HL}\Psi \right). \quad (25)$$

## 6. Исходная информация для оценки

Мы получили решение задачи, но как применить его к практической оценке? Дело в том, что выгоды от использования машин явно не наблюдаются, поэтому величины  $L$ ,  $H$  и  $q$  – неизвестны. Для их определения воспользуемся информацией от машинах в новом состоянии.

Прежде всего, о таких машинах известны их цены на первичном рынке, а стало быть – и рыночная стоимость. Поэтому равенство (23) можно рассматривать как уравнение для определения масштабного множителя  $H$ .

Оценщики считают, что для нормально эксплуатирующейся машины устранимый и неустрашимый износ (по крайней мере, в начале эксплуатации) примерно совпадают, так что  $d_i = 0.5^8$ . Тогда из (25) находим  $2q \left( n - \frac{n-1}{HL} \Psi \right) = 1 + (n-1)q$ , откуда имеем:

$$q = \frac{1}{n+1 - 2(n-1) \frac{\Psi}{HL}} \quad (26)$$

Поскольку стоимость машины в новом состоянии не меньше утилизационной, из формулы (25) легко выводится, что знаменатель в полученном выражении больше 1.

Другие параметры модели можно найти, используя техническую информацию, сообщаемую производителями или пользователями машин.

Производители машин обычно сообщают покупателям техническую информацию о них и, в частности, дают рекомендации по рациональной периодичности ремонтов (те же сведения повторяются и в технической литературе). Разумеется, при этом они обычно имеют в виду только длительности первых межремонтных циклов, при условии, что машина рационально используется по своему назначению (и, значит, не работает “на износ”). Это позволяет оценить величину  $X$  и рассматривать первое из равенств (24) как уравнение относительно  $L$ .

Для оценки рационального срока службы машин обычно используются следующие источники:

- 1) Информация от производителей. Если эти сроки не слишком велики, им обычно можно доверять, поскольку соответствующие машины обычно проходят испытания на долговечность. Однако увеличение срока службы за счет работы “на износ” при этом не учитывается.
- 2) Публикации пользователей. Они носят отрывочный характер и обычно относятся к машинам, нормально использовавшимся для выполнения конкретных работ в конкретном регионе. Авторами таких публикаций являются обычно технические специалисты, и их данным можно доверять лишь в той части, где говорится о пригодности машин определенного возраста к выполнению тех или иных работ. Однако неясно, можно ли считать такие сроки экономически рациональными – иногда они могут быть завышены.

---

<sup>8</sup> Впрочем, для  $d_i = 0.3$  результаты оказываются близкими.

- 3) Нормы амортизации. Сведения о сроках службы машин различных видов обычно ищут, прежде всего, в прежних нормах амортизации [13] или в пришедшем им на смену классификаторе основных средств [9]. По нашему мнению, оба эти документа дают заниженные оценки указанных сроков, поскольку предназначены исключительно для фискальных целей. Отметим также, что некоторые корпорации (например, ОАО “РЖД”) издают нормативные документы, определяющие сроки полезного использования основных средств. Во многих случаях соответствующие сроки можно считать более достоверными.
- 4) Данные финансовой отчетности. Правила бухгалтерского учета (ПБУ 6/01) разрешают организациям устанавливать сроки службы основных средств самостоятельно, однако какой-либо анализ соответствующей практики не проводился. Представляется, что бухгалтерия организаций не уделяет обоснованному установлению сроков службы должного внимания и чаще всего устанавливает эти сроки на уровне амортизационных, хотя предприятиям, стремящимся минимизировать налоги, выгодно устанавливать для своих основных средств возможно меньшие сроки службы в пределах интервалов, указанных в [9].
- 5) Другие нормативно-методические документы. Подробная информация о сроках службы имеется в документах, используемых в США для оценки активов в целях налогообложения, например, в [6, 7, 14]. Эти сроки достаточно обоснованы, однако неясно, насколько ими можно пользоваться в России, где условия работы машин, система цен и структура эксплуатационных затрат иные.

Указанные обстоятельства не позволяют дать обоснованную оценку рациональному сроку службы машин (нередко принимаемые оценщиками сроки отличаются от рациональных на межремонтный цикл). Однако последнее из равенств (24) можно рассматривать как контрольное: получаемое из него значение срока службы не должно слишком сильно отличаться от значений из указанных выше источников.

При применении рассмотренной модели полезно иметь в виду следующее обстоятельство. Цены на рынках постоянно меняются, поэтому целесообразно вначале оценить стоимость машины в новом состоянии ( $K$ ), а затем умножить ее на коэффициент годности, отражающий износ машины. Указанный коэффициент можно найти с помощью рассмотренной модели, если положить в ней  $K=1$ . Одновременно придется заменить утилизационную стоимость машины ( $U$ ), постоянную часть стоимости ремонта ( $P$ ), и годовой прирост стоимости ремонта ( $\Psi$ ) и масштабный

множитель ( $H$ ) соответствующими относительными показателями  $u = U/K$ ,  $p = P/K$ ,  $\psi = \Psi/K$  и  $h = H/K$ . Ожидаемое количество межремонтных циклов для этой машины обозначим через  $N$ . В результате получаем следующие уравнения для  $L$ ,  $H$  и  $q$ :

$$\frac{Nh}{2[1+(N-1)q]} \left[ L - \frac{(N-1)\psi}{NH} \right]^2 + \frac{(N-1)\psi^2}{2Nh(1-q)} - (N-1)p + u = 1; \quad (28)$$

$$q = \frac{1}{N+1-2(N-1)\frac{\psi}{hL}}; \quad L - \frac{\psi}{h(1-q)} = [1+(N-1)q]X.$$

При этом ожидаемые длительности последнего межремонтных циклов и полный рациональный срок службы составят:

$$X_N = X + \frac{\psi}{h(1-q)}; \quad T = (N-1)X + X_N. \quad (29)$$

Оптимальное количество межремонтных циклов  $N$  можно теперь найти следующим способом. Зададим вначале  $N=1$  и решим систему (28). Теперь, используя найденные значения  $L$ ,  $h$  и  $q$ , найдем стоимости машины в новом состоянии, отвечающие другим значениям  $N$ . Если хотя бы одно из них окажется больше 1, значит принятое значение  $N$  – неправильное. Тогда повторим ту же процедуру, приняв  $N=2$  и т.д., до тех пор, пока не найдется правильное значение  $N$ . После этого коэффициенты годности для подержанной машины можно рассчитать по формуле (22), используя значения  $L$ ,  $h$  и  $q$  для машины в новом состоянии.

Для машин с относительно коротким сроком службы, проходящим 1-2 ремонта, удобнее иной порядок оценки, при котором задается рациональный срок службы машины ( $T$ ), а ожидаемые длительности межремонтных циклов ( $X$  и  $X_n$ ) рассчитываются.

Заметим, наконец, что, если машину постоянно ремонтировать, не обращая внимания на эффективность ремонта, то срок ее службы может оказаться достаточно большим. Как показано выше, “критический” возраст машины будет корнем уравнения  $qf(t) + (1-q)f(0) = 0$ . Если  $f(t)$  задается формулой (18), то это уравнение принимает вид:  $qh(L-t) + (1-q)hL = 0$ , а его решением будет  $L/q$ .

Рассмотрим теперь машину, которая с момента ввода в эксплуатацию использовалась наиболее эффективно и только что вышла из первого ремонта. Коэффициент годности этой машины  $w$  можно найти по формуле (22), положив  $t=X$ ,  $s=0$ ,  $n=N-1$ . Величина  $w$  показывает, какую долю составляет стоимость машины после первого ремонта от стоимости машины в новом состоянии. Грубо говоря,  $w$  отражает тот уровень, до

которого восстановилась стоимость машины после первого ремонта. В [5] этот показатель был назван *коэффициентом восстановления*. Информацию о фактических коэффициентах восстановления можно получить из анализа предложений о продаже машин, в которых указывается возраст машины и упоминается, что перед продажей она прошла капитальный ремонт. По имеющимся данным,  $0.65 \leq w \leq 0.8$ , и это обстоятельство позволяет контролировать правильность расчетов.

Приведем два примера.

**Пример 1.** Рассмотрим машину, у которой  $p = 0.12$ ,  $u = 0.09$ ,  $\psi = 0.024$ ,  $X = 3$ . Решая систему уравнений (28) и подбирая оптимальное количество межремонтных циклов, получаем:  $N = 5$ ,  $q = 0.2001$ ,  $L = 6.402$ ,  $h = 0.0300$ ,  $X_n = 4.00$ ,  $T = 16.00$  года. “Критический” возраст этой машины составит  $L/q = 32$  года, а коэффициент восстановления  $w = 0.752$ . Относительная стоимость ремонтов при этом составит  $p + \psi X = 0.192$  – одна пятая стоимости машины в новом состоянии.

Возьмем теперь три машины той же марки возраста 7 лет, прошедшие 2 ремонта. Первая машина эксплуатировалась нормально по своему назначению, прошла последний ремонт в 6 лет, и у нее  $s = 1$ . Вторая машина только что вышла из ремонта, у нее  $s = 0$ . Третья машина использовалась более интенсивно, была отремонтирована в возрасте 5 лет, и у нее  $s = 2$ .

Различия между рассматриваемыми машинами по основным “техническим” показателям, рассчитанным по формулам (20) и (22), показаны в табл. 1 (все сроки в ней указаны в годах).

Таблица 1.

Показатель	Машина		
	1	2	3
Возраст ( $t$ )	7	7	7
ЭВЦ ( $s$ )	1	0	2
Длительность предстоящих (кроме последнего) межремонтных циклов ( $X$ )	3.00	2.86	3.14
Ожидаемый срок до очередного ремонта ( $T_1$ )	2.00	1.86	1.14
Длительность последнего цикла ( $X_n$ )	4.00	3.86	4.14
Ожидаемый оставшийся срок службы ( $T_n$ )	9.00	9.57	8.43
Ожидаемый полный срок службы ( $T$ )	16.00	16.57	15.43
Коэффициент годности	0.416	0.498	0.355

Как видим, рыночные стоимости машин одинакового возраста могут различаться по стоимости в полтора раза. Заметим теперь, что для установления коэффициентов годности оценщики нередко обрабатывают

данные о ценах сделок с машинами разного возраста, аппроксимируя соответствующую зависимость гладкими кривыми. Отклонения фактических цен от построенных кривых оценщики трактуют как случайные. Между тем, как показывает построенная модель, значительная доля таких отклонений может быть объяснена различиями в ЭВЦ.

На рис. 1 представлены зависимости коэффициентов годности от возраста для машины А в новом состоянии ( $t = s = 0$ ) и машины Б, у которой ( $t = 4$ ;  $s = 0$ ), отвечающие последующему наиболее эффективному их использованию.

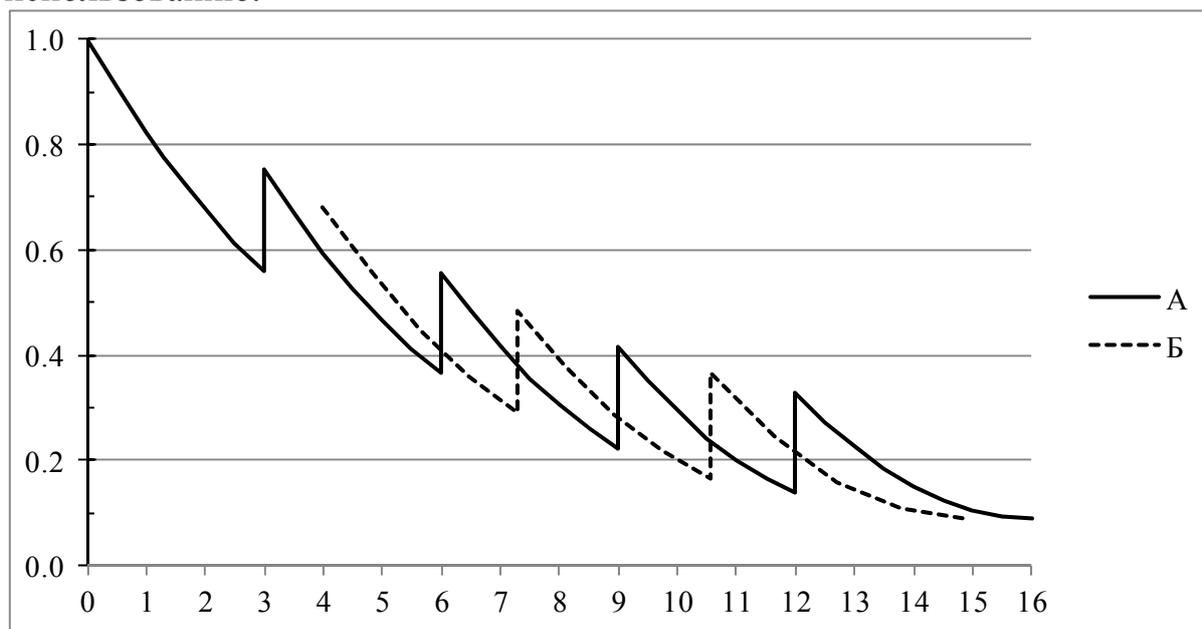


Рис. 1. Коэффициенты годности для машин А и Б.

Мы видим, что если какой-либо ремонт был проведен несвоевременно, то оставшийся срок службы, количество и рациональные сроки проведения последующих ремонтов при этом изменятся. Представляется, что службы технической эксплуатации машин не обращают на это обстоятельство должного внимания. ■

**Пример 2.** У машин некоторой марки  $p = 0.16$ ,  $u = 0.03$ ,  $\psi = 0.0135$ ,  $X = 4.5$ . Решая систему уравнений (28), найдем:  $q = 0.2692$ ,  $L = 7.67$ ,  $h = 0.0247$ ,  $N = 3$ ,  $X_n = 5.25$ ,  $T = 14.25$  года, а коэффициент восстановления  $w = 0.618$ . Относительная стоимость ремонтов при этом составит  $p + \psi X = 0.221$ . “Критический” возраст этих машин составит  $L/q = 28.5$  года.

Рассмотрим четыре машины данной марки, возраст которых превышает рациональный срок службы. Первая машина прошла 3 “нормальных” межремонтных цикла и была отремонтирована в возрасте 13.5 года, после чего отработала еще 1 год. Вторая и четвертая машины прошли ремонт на дату оценки в возрасте соответственно 16 и 21 год.

Третья машина прошла ремонт в возрасте 16 лет и после этого отработала 2 года. Предыдущая эксплуатация рассматриваемых машин была нерациональной (проведение последних ремонтов было экономически нецелесообразным), однако все они находятся в хорошем техническом состоянии. Наиболее эффективное использование всех этих машин не предусматривает проведения ремонта ( $n=1$ ). Основные показатели этих машин приведены в табл. 2.

Таблица 2.

Показатель	Машина			
	1	2	3	4
Возраст ( $t$ )	14.5	16	18	21
ЭВЦ ( $s$ )	1	0	2	0
Длительность последнего цикла ( $X_n$ )	4.04	3.36	3.36	2.02
Ожидаемый оставшийся срок службы ( $T_n$ )	3.04	3.36	1.36	2.02
Ожидаемый полный срок службы ( $T$ )	17.54	19.36	19.36	23.02
Коэффициент годности	0.144	0.170	0.053	0.080

Обратим внимание, что с увеличением возраста машины ожидаемые длительности очередного (единственного) межремонтного цикла сокращаются. Как видно из таблицы, стоимости рассмотренных машин существенно превышают утилизационную. Это опровергает устоявшееся мнение, что по истечении рационального срока службы стоимость машины близка к утилизационной. ■

Численное решение рассмотренной задачи при небольших (до 0.1) ставках дисконтирования показывает, что оптимальные ожидаемые длительности межремонтных циклов и коэффициенты годности ( $a$ , значит, и коэффициент восстановления) слабо зависят от этих ставок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Смоляк С.А. Проблемы и парадоксы оценки машин и оборудования. М.: РИО МАОК. 2008.
2. Смоляк С.А. Модели оценки износа машин и оборудования // Сб. “Анализ и моделирование экономических процессов”, вып. 5. М.: ЦЭМИ РАН. 2008.
3. Смоляк С.А. Модели оценки износа машин и оборудования – II // Сб. “Анализ и моделирование экономических процессов”, вып. 7. М.: ЦЭМИ РАН. 2010.
4. Международные стандарты оценки. Седьмое издание. 2005. М.: ОО “Российское общество оценщиков”, 2005.
5. Оценка стоимости машин, оборудования и транспортных средств / А.П. Ковалев и др. М.: Интерреклама, 2003.
6. Marshall Valuation Service, 2011. Marshall and Swift Publication Company. 915 Wilshire Blvd., 8th Floor, Los Angeles, CA 90017.
7. California State Board of Equalization. Assessors’ Handbook Section 581. Equipment and Fixtures Index, Percent Good and Valuation Factors. 2010. <http://www.boe.ca.gov/proptaxes/pdf/ah58110.pdf>.
8. Oklahoma tax commission. Oklahoma Business Personal Property Valuation Schedules. 2010. [http://www.tax.ok.gov/advform/BPP-2011-01\\_01\\_2011\\_final.pdf](http://www.tax.ok.gov/advform/BPP-2011-01_01_2011_final.pdf).
9. О классификации основных средств, включаемых в амортизационные группы. Постановление Правительства РФ от 1 января 2002 года № 1 (в ред. Постановлений Правительства РФ от 09.07.2003 N 415, от 08.08.2003 N 476, от 18.11.2006 N 697, от 12.09.2008 N 676, от 24.02.2009 N 165, от 10.12.2010 N 1011). <http://inv-1.ru/klassifikator-osnovnyh-sredstv>
10. Михайлец В.Б. Формула для расчета стоимости с учетом неустранимого и устранимого износов. <http://www.ocenchik.ru/docs/465.html> ; [valuer.ru/files/Bels1955/Износ-2007.doc](http://valuer.ru/files/Bels1955/Износ-2007.doc) .
11. Степанов Д.Н. К определению физического износа для машин и оборудования. <http://www.appraiser.ru/default.aspx?SectionId=186&ID=908> ; <http://www.apline.ru/method/machines/223/>
12. Колегаев Р.Н. Экономическая оценка качества и оптимизация системы ремонта машин. М.: Машиностроение, 1980.
13. Единые нормы амортизационных отчислений. М.: Инфра-М, 2000.
14. Arizona Department of Revenue. Personal property Manual 2011. <http://www.azdor.gov/Portals/0/Brochure/AZ-Personal-property-Manual.pdf>

**Формирование установок индивидов и равновесие по Нэшу  
бескоалиционных игр: стохастический подход**<sup>1</sup>

В работах ([1] , [2] и других) представлен синергетический подход к процессам формирования установок индивидов в малых социальных группах на основе эффекта подражания. В частности, в [2] построена бескоалиционная игра  $n$  лиц, равновесие по Нэшу которой совпадает с гомеостазом в социальной группе; однако, эта игра связана с введением новых дополнительных переменных и новых функций выигрыша. С другой стороны, автором в работе [3] доказано, что каждой **детерминированной** одномерной линейной модели **E** формирования установок  $n$  лиц соответствует выпуклая бескоалиционная игра  $G(\mathbf{E})$  тех же  $n$  лиц на кубе размерности  $n$  с квадратичными вогнутыми функциями выигрыша, для которой равновесие по Нэшу совпадает с гомеостатическим состоянием заданной линейной модели . В данной статье аналогичный результат получен для **стохастической** модели формирования установок индивидов.

*1. Установка как стационарный случайный процесс*

Впервые стохастические модели формирования установок индивидов рассматривались Ю.Н.Гаврильцом и Б.А.Ефимовым [4,5].

В частности, автором в работе [5] рассмотрена линейная модель с аддитивными попарно независимыми нормальными случайными функциями  $\xi_i(t)$ , которая описывается системой линейных стохастических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в форме Ланжевена:

$$\frac{dE_i}{dt} = F_i(E) + \xi_i(t) \quad i \in N \quad , \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект 10-02-00073.

где  $N := [1, \dots, n]$ ;  $E = (E_i)$ ,  $E_i$  – зависящие от времени неотрицательные переменные, характеризующие установки участников;

$$F_i(E_1, \dots, E_n) = A_i \left( \sum_{j \in N} \lambda_j E_j - \sigma_i E_i \right) + B_i (b_i - E_i) + C_i (c_i - E_i) \quad i \in N \quad . \quad (2)$$

Здесь постоянные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$A_i > 0, \quad B_i + C_i > 0, \quad \lambda_i \in [0, 1] \quad \sum_{i \in N} \lambda_i = 1, \quad \sigma_i \geq 1 \quad , \quad (3)$$

и параметры  $b_i, c_i$  неотрицательны. Первое слагаемое описывает эффект "индивидуального подражания" коллективу. Второе слагаемое описывает "силу эгоизма" ( $b_i$  – идеальная установка или норма  $i$ -го агента). Третье слагаемое описывает "силу внешнего влияния" ( $c_i$  – внешняя идеальная установка).

В [5] доказано, что в этой модели существует стохастически устойчивое стационарное решение, являющееся гомеостазом в социальной группе. Гомеостатическое состояние – вектор  $E^*$  системы (1), зависящий от заданных идеальных установок  $b_i, c_i$ , которые, в свою очередь, являются первоначальными идеальными установками. При ограничениях (3) на параметры модели стационарный стохастически устойчивый гауссовский векторный процесс  $E^*$ , являющийся решением системы (1), существует.

Установками в модели принятия решений являются стационарные случайные в широком смысле процессы (т.е. имеющие постоянные математические ожидания, и корреляционные функции которых зависят только от  $\tau = t_2 - t_1$ ).

Мы ограничим этот класс процессов следующим образом. Фиксируем натуральное число  $L \geq 2$  и рассмотрим все случайные функции, которые можно составить из синусоид различных частот со случайными амплитудами и фазами. Формально,

$$E_i(t) = m_i + \sum_{k=1}^L [U_{ik} \sin(\omega_{ik}t) + Z_{ik} \cos(\omega_{ik}t)] \quad , \quad (4)$$

где  $(\omega_{ik})$  – произвольно выбранные частоты,  $m_i$  – постоянные математические ожидания, а случайные величины  $(U_{ik}, Z_{ik})$  имеют нулевые математические ожидания.

Предположим, что случайные величины  $U_{ik}, Z_{ik}$  не коррелированы и имеют попарно равные дисперсии. В этом случае имеет место (см. [6]) теорема Винера - Хинчина о том, что случайный процесс  $E_i(t)$  стационарен.

Напомним, что математическое ожидание  $\mathbf{M}(E)$  случайной функции является обычной (неслучайной) функцией  $M(t)$ , при этом

$$\mathbf{M}(E_1 + E_2) = \mathbf{M}(E_1) + \mathbf{M}(E_2) \quad ,$$

и математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от её математического ожидания. Таким образом, взяв математическое ожидание от левой и правой частей равенств (1), получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dM_i}{dt} = A_i \left( \sum_{j \in N} \lambda_j M_j - \sigma_i M_i \right) + B_i (b_i - M_i) + C_i (c_i - M_i) \quad i \in N \quad . \quad (7)$$

относительно функций  $M_i(t) := \mathbf{M}E_i(t)$ .

В гомеостатическом состоянии  $M^*$  функции  $M_i$  постоянны во времени:  $M(t) \equiv M^* = \text{const}$  (здесь мы перешли к векторной форме записи,  $M := (M_i)$ ). Поэтому, если обозначить

$$h_i(M) := A_i \left( \sum_{j \in N} \lambda_j M_j - \sigma_i M_i \right) + B_i (b_i - M_i) + C_i (c_i - M_i) \quad i \in N \quad (8)$$

(правая часть (7)), то вектор  $M^*$  определяется как решение системы уравнений

$$h_i(M) = 0 \quad \forall i \in N \quad . \quad (9)$$

В [1] доказано, что эта система имеет неотрицательное решение  $M^*$ .

## 2. Равновесие по Нэшу в выпуклой игре, описывающей формирование установок индивидов в условиях стохастики

2.1. *Выпуклая игра.* Напомним (см. [7, §10]), что игра  $n$  лиц задается набором  $G = \{X_i, u_i\}$ ,  $i \in N$ , где  $X_i$  – множества стратегий игроков, а  $u_i$  – их функции выигрыша, определенные на декартовом произведении

$$\Omega := X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \quad . \quad (10)$$

Каждая точка  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  называется ситуацией, а значения  $u_i$  – это выигрыши игроков в ситуации  $x$ . Игра называется выпуклой, если  $X_i$  – выпуклые компакты, а функции  $u_i$  выпукло-вогнуты. Последнее означает, что каждая функция  $u_i(x_1, \dots, x_n)$  вогнута (выпукла вверх) по своему аргументу  $x_i$  (при фиксированных значениях "чужих") и выпукла вниз по совокупности чужих аргументов при фиксированном значении  $x_i$ . Формально это условие удобно сформулировать так: функция

$$U_i(y; x) := u_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad y \in X_i, x \in \Omega \quad (11)$$

(собственный аргумент  $x_i$  заменен на  $y$  и выделен как самостоятельный) вогнута по  $y$  и выпукла по  $x$ .

Точка  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \Omega$  называется ситуацией равновесия, если при каждом  $i \in N$  выполняется условие

$$x_i^* = \arg \max_{y \in X_i} U_i(y; x^*) \quad . \quad (12)$$

Предполагая, что  $x^*$  – внутренняя точка множества  $\Omega$ , можем записать условия (12) в виде

$$\frac{\partial U_i(y; x^*)}{\partial y} \Big|_{y=x_i^*} = 0 \quad \forall i \in N \quad . \quad (13)$$

Теорема Нэша утверждает, что равновесие в выпуклой игре существует.

*2.2. Построение игры, основной результат.* В нашем случае в качестве  $X_i$  возьмем некоторый достаточно большой отрезок положительной полуоси вещественной прямой, а для определения функций выигрыша сделаем следующее.

Пусть функции  $h_i(x)$  определены в (8) с заменой вектора математических ожиданий  $M$  на вектор формальных переменных  $x$ . Положим, аналогично (11)

$$H_i(y; x) := h_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad y \in X_i, x \in \Omega \quad , \quad (14)$$

и, наконец, определим функции выигрыша как неопределенный интеграл

$$u_i(x) := \int^{x_i} H_i(z; x) dz \quad x \in \Omega, i \in N \quad . \quad (15)$$

В соответствии с (11)

$$U_i(y; x) := \int^y H_i(z; x) dz \quad x \in \Omega, \quad i \in N, \quad (16)$$

и т.к.  $H_i$  – линейная функция всех своих аргументов, то  $U_i$  – квадратична по  $y$  со старшим коэффициентом (см. (8))

$$r := \frac{1}{2}[(\lambda_i - \sigma_i)A_i - (B_i + C_i)]$$

и линейна по  $x$ . В силу условий (3),  $r < 0$ , следовательно построенная игра выпукла.

**Теорема.** Равновесие по Нэшу в построенной выпуклой игре совпадает с гомеостатическим состоянием вектора математических ожиданий линейной стохастической модели  $\mathbf{E}$ , описанной в разделе 1.

*Доказательство.* Гомеостатическим состоянием модели  $\mathbf{E}$  является вектор  $M^*$ , определенный условиями (9). Равновесие  $x^*$  определяется условиями (13), которые, в силу (16), есть

$$H_i(y; x^*)|_{y=x_i^*} = 0 \quad \forall i \in N. \quad (17)$$

Согласно (14), левая часть здесь равна  $h_i(x^*)$ , поэтому условия (9) и (17) совпадают. Это доказывает теорему. ■

*Примечание.*

1. Существование равновесия в выпуклой игре утверждается теоремой Нэша. Поэтому из нашей теоремы следует существование гомеостатического состояния в линейной модели формирования установок (как отмечено выше, это было сделано в [1]). ■

\*\*\*\*\*

Автор выражает признательность проф. В.З.Беленькому за внимательную редакторскую правку первоначального текста.

## Литература

1. Гаврилец Ю.Н., Ефимов Б.А. Изменение предпочтений индивидов в социальной среде. *Экономика и мат. методы*, 1997, № 2.
2. Гаврилец Ю.Н., Ефимов Б.А. Теоретико-игровая модель формирования установок в референтной группе. *Экономика и мат. методы*, 2000, № 1.
3. Ефимов Б.А. Формирование установок индивидов и равновесие по Нэшу бескоалиционных игр. – Сб. "Математическое моделирование социальных процессов". М.: МГУ, 2012.
4. Гаврилец Ю.Н., Ефимов Б.А. Вероятностная модель формирования установок индивидов в социальной среде. Тезисы конференции "Математическое и компьютерное моделирование в науках о человеке и обществе", Вологда, 1999.
5. Ефимов Б.А. Стохастические модели формирования установок в социальной среде. – Сб. "Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов", 2001, вып. 2. М.: ЦЭМИ РАН.
6. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций (ред. Свешников А.А.). М.: Наука, 1965.
7. Итеративные методы в теории игр и программировании. М.: Наука, 1974 (ред. В.З.Беленький, В.А.Волконский).

## Одно обобщение дискретной модели доходности «коротких» облигаций

В теории и практике моделирования ценообразования финансовых активов основным подходом является принцип *принцип безарбитражности* (ПБ) [1]. Он заключается в том, что два портфеля с одинаковыми будущими случайными платежами (*эквивалентные* портфели) должны иметь одинаковую цену сегодня. В противном случае появляется возможность арбитража (заработать «бесплатный завтрак»): собственник портфеля с высокой ценой может продать его и купить эквивалентный портфель с более низкой ценой, получая в качестве дохода разницу цен, поскольку ожидаемые в будущем платежи по обоим портфелям одинаковы. В соответствии с ПБ цена финансового портфеля определяется как цена эквивалентного ему портфеля с наиболее простыми активами, цены которых легче подсчитать.

Важно отметить, что ПБ основывается только на том, какие существуют соотношения между ценами разных финансовых активов, но он ничего не говорит о том, каким образом устанавливаются сами эти цены.

В данной работе мы следуем подходу Кохрейна [2], состоящему в том, что определяющим фактором ценообразования (его *ядром*) является стохастический дисконтный фактор. Однако, в отличие от [2], мы концентрируемся, в основном, на временной структуре и ценообразовании процентных ставок в рамках так называемых аффинных моделей Дюффи-Кана [3] с **дискретным** временем. Это позволяет единообразно рассматривать дискретные модели Васичека [4] и Кокса-Ингерсолла – Росса [5], и ввести латентный параметр, характеризующий отношение инвесторов в целом к риску. В дальнейшем это позволит использовать его в качестве единственного калибровочного параметра для всего рассматриваемого временно'го спектра процентных ставок; такая идея реализована в работе на примере ставок Московского рынка межбанковских кредитов (МРМБК, «MosPrime»).

**Примечание.** Что касается непрерывных моделей, то эконометрическая оценка процентных ставок по данным МРМБК была проведена в 2003 г. в работе Анатольева и Корепанова [6]. В монографии Бьюрка [7] содержится подробный обзор последних достижений в моделях с непрерывным временем. Довольно полное эконометрическое

исследование статистических свойств доходностей к погашению ГКО было проведено Дробышевским [8].

Структура статьи такова. В Разделе 1 на основе ПБ рассмотрена модель ценообразования двух облигаций при конечном числе состояний будущей короткой (однопериодной) ставки. В Разделе 2 дано построение рассматриваемой модели для бесконечномерного пространства состояний будущей короткой ставки. В Разделе 3 обсуждается связь между наблюдаемыми переменными в указанной модели и латентной переменной, характеризующей отношение инвесторов к риску изменения стохастического дисконтирующего множителя. Раздел 4 посвящен применению рассматриваемой модели к анализу процентных ставок «MosPrime»; исходные данные по этим ставкам вынесены в Приложение 1.

Показано, что использованием единственной латентной переменной в качестве «калибровочного параметра» можно добиться хорошего согласия расчетных доходностей кредитов (депозитов) с наблюдаемыми доходностями для пяти различных коротких сроков одновременно; вычисления вынесены в Приложения 2-4.

## 1. Безарбитражность рынка бескупонных облигаций

Пусть в начальный момент  $t = 0$  рынок состоит из двух бескупонных (не имеющих выплат до погашения) облигаций номиналом единица: однопериодная ценой  $b_0^1$  и двухпериодная ценой  $b_0^2$ . Примем бинарную модель однопериодной (короткой) ставки  $r$ : при  $t = 0$   $r = r_0 > 0$ , а при  $t = 1$  возможны два альтернативных исхода:  $\omega_1$  – с вероятностью  $p$  ( $0 < p < 1$ ) ставка становится равной  $r_0 + \delta$ ,  $0 < \delta < r_0$ ;  $\omega_2$  – с вероятностью  $1 - p$  ставка становится равной  $r_0 - \delta$ . Тогда следует ожидать, что если в начальный момент цены облигаций были равны  $b_0^1 = (1 + r_0)^{-1}$ ,  $b_0^2 = (1 + \rho)^{-2}$ , то в момент  $t = 1$  однопериодная облигация при любом исходе превращается в обязательство выплаты номинала, а двухпериодная облигация становится однопериодной с ценой  $b_1^1(\omega) = (1 + r(\omega))^{-1}$ , в которой ставка  $r$  принимает одно из двух указанных значений.

Рассматриваемый рынок двух облигаций является безарбитражным, если существуют такие неотрицательные числа  $z_1, z_2$ , которые удовлетворяют следующей системе равенств

$$\begin{pmatrix} b_0^1 \\ b_0^2 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \begin{pmatrix} b_1^0(\omega_1) \\ b_1^1(\omega_1) \end{pmatrix} + z_2 \cdot \begin{pmatrix} b_1^0(\omega_2) \\ b_1^1(\omega_2) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Можно показать, что выполнение условий

$$\frac{1+r_0-\delta}{1+r_0} < \left( \frac{1+\rho}{1+r_0} \right)^2 < \frac{1+r_0+\delta}{1+r_0} \quad (1.2)$$

обеспечивает положительность чисел  $z_1, z_2$  в равенстве (1.1), причем  $z_1 + z_2 = (1+r_0)^{-1}$ . Поэтому соотношение (1.1) может быть записано в виде:

$$\begin{pmatrix} b_0^1 \\ b_0^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+r_0} \left\{ \frac{z_1}{z_1+z_2} \cdot \begin{pmatrix} b_1^0(\omega_1) \\ b_1^1(\omega_1) \end{pmatrix} + \frac{z_2}{z_1+z_2} \cdot \begin{pmatrix} b_1^0(\omega_2) \\ b_1^1(\omega_2) \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{1+r_0} E^Q \begin{pmatrix} b_1^0(\omega) \\ b_1^1(\omega) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Знак  $E^Q(\dots)$  означает математическое ожидание выражения в скобках берется по другой мере, нежели исходная мера событий  $\omega_1, \omega_2$ ; именно, по вероятностной мере  $z_1 \cdot (z_1+z_2)^{-1}, z_2 \cdot (z_1+z_2)^{-1}$  вместо исходных вероятностей  $1-p, p$ .

Заметим, что доходность от приобретения и удержания до погашения однопериодной облигации при любом из событий ( $\omega_1, \omega_2$ ) равна  $r_0$ , а при выполнении неравенств (1.2) доходность от купли–продажи двухпериодной облигации через период будет больше  $r_0$  при событии  $\omega_1$  и меньше  $r_0$  при  $\omega_2$ . Это видно из следующих соотношений: доходность приобретения при  $t=0$  двухпериодной облигации и продажи ее при  $t=1$  равна по определению

$$\tilde{r} = \left( \frac{1}{1+r_0 \pm \delta} - \frac{1}{(1+\rho)^2} \right) \cdot (1+\rho)^2 = \frac{(1+\rho)^2}{1+r_0 \pm \delta} - 1,$$

и, следовательно

$$\tilde{r} - r_0 = (1+r_0) \cdot \left( \frac{(1+\rho)^2}{(1+r_0 \pm \delta) \cdot (1+r_0)} - 1 \right).$$

Поэтому при реализации события  $\omega_1$  и выполнении левого неравенства, в (1.2) будет  $\tilde{r} - r_0 > 0$ , а при реализации события  $\omega_2$  и выполнении правого неравенства в (1.2)  $\tilde{r} - r_0 < 0$ .

Если же двойное неравенство (1.2) не выполняется, это означает, что в **обоих случаях** купля–продажа двухпериодной облигации или меньше  $r_0$  (не выполняется левое неравенство в (1.2)) или больше  $r_0$  (не выполняется правое неравенство в (1.2)). При этом, естественно, возникает ситуация чистого арбитража, когда возможно «сделать деньги из воздуха».

Например, если доходность двухпериодной облигации больше, чем правое ограничение в неравенстве (1.2), то можно продать однопериодные облигаций в количестве  $u_1$  и купить на эти деньги  $u_2$  двухпериодных. Схема таких транзакций представлена в таблице 1

Таблица 1

	Стоимость покупки	Стоимость продажи	Долг	Результат
t=0	$u_2 \cdot b_0^2$	$u_1 \cdot b_0^1$	$u_1 \cdot b_1^0, (u_1 < 0)$	$u_2 = -u_1 \cdot b_0^1 / b_0^2$
t=1		$u_2 \cdot b_1^1$	$-u_1 \cdot b_1^0$	$u_2 \cdot b_1^1 - u_1 \cdot b_1^0 > 0$

В результате возникает ситуация чистого арбитража: при любом исходе событий  $\omega_1, \omega_2$ , когда сумма потраченных денег при  $t=0$  (сумма выражений в клетках «Стоимость покупки» и «Стоимость продажи» с учетом «Результата» в строчке  $t=0$ ) равна нулю, а сумма полученных денег при  $t=1$  (значение в правой нижней клетке таблицы 1) больше нуля с вероятностью единица. Нижнее неравенство в последнем столбце является следствием неравенства

$$(1 + \rho)^2 > (1 + r_0) \cdot (1 + r_0 + \delta), \quad (1.4)$$

следующего из гипотезы, что неравенство (1.2) не выполняется и доходность двухпериодной облигации всегда больше  $r_0$ .

Усложним немного ситуацию, добавив еще одно возможное состояние короткой ставки в момент  $t=1$ , а именно  $\omega_3$ , в котором  $r(\omega_3) = r_0$ .

Определим возможность безарбитражности рынка рассмотренных двух облигаций при новом пространстве состояний в момент  $t=1$ ; для этого надо выбрать набор трех неотрицательных чисел  $(z_1, z_2, z_3)$ , удовлетворяющих равенствам

$$\begin{pmatrix} b_0^1 \\ b_0^2 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \begin{pmatrix} b_1^0(\omega_1) \\ b_1^1(\omega_1) \end{pmatrix} + z_2 \cdot \begin{pmatrix} b_1^0(\omega_2) \\ b_1^1(\omega_2) \end{pmatrix} + z_3 \cdot \begin{pmatrix} b_1^0(\omega_3) \\ b_1^1(\omega_3) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Такой набор однозначно определяется выбором величины  $z_3$ , в частности, при  $z_3=0$  (1.5) переходит в (1,1). Можно показать, что такие числа существуют при условии выполнения следующих неравенств:

$$\frac{1 + r_0 - \delta}{(1 - \delta \cdot z_3) \cdot (1 + r_0)} < \left( \frac{1 + \rho}{1 + r_0} \right)^2 < \frac{1 + r_0 + \delta}{(1 + \delta \cdot z_3) \cdot (1 + r_0)}, \quad z_3 \in \left( 0, \frac{1}{1 + r_0} \right). \quad (1.6)$$

В этом случае также возможно представление цен в момент времени  $t = 0$  через математическое ожидание цен этих облигаций по некоторой новой вероятностной аналогично формуле (1.3).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_0^1 \\ b_0^2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{1+r_0} \left\{ \frac{z_1}{z} \cdot \begin{pmatrix} b_1^0(\omega_1) \\ b_1^1(\omega_1) \end{pmatrix} + \frac{z_2}{z} \cdot \begin{pmatrix} b_1^0(\omega_2) \\ b_1^1(\omega_2) \end{pmatrix} + \frac{z_3}{z} \cdot \begin{pmatrix} b_1^0(\omega_3) \\ b_1^1(\omega_3) \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{1+r_0} E^Q \begin{pmatrix} b_1^0(\omega) \\ b_1^1(\omega) \end{pmatrix}, \quad z = z_1 + z_2 + z_3. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подчеркнем, что вероятностные меры формул (1.3) и (1.7) не имеют отношения к вероятностям наступления событий  $\omega$ , а строятся по возможным реализациям. Различие между этими формулами в том, что первая определена однозначно, а вторая не единственна (зависит от параметра  $z_3$ ). В первом случае говорят, что рынок является *полным*, а во втором – *неполным*.

Сформулируем понятие арбитражного портфеля облигаций. Пусть на рынке существуют одно-, двух-, ...,  $n$ -периодные облигации. Определим портфель рассматриваемых облигаций как строку  $h = (u_1, \dots, u_n)$  такую, что капитал этого портфеля в момент  $t$  есть  $V_t^h(\omega) = (h, b_t(\omega))$  (скалярное произведение). Предполагается, что короткие продажи (short sell – возможность продать бумагу, которой не владеешь, взяв ее в долг с обязательством вернуть в определенный момент времени) допускаются на данном рынке; в строке портфеля это отражается отрицательным значением  $u_i < 0$  для такого актива.

**Определение.** Портфель  $h$ , сформированный в момент  $t = 0$  с нулевым капиталом  $V_0^h = (h, b_0) = 0$ , является **арбитражным**, если его капитал в момент времени  $t = 1$  положителен с вероятностью единица.

В первом из рассмотренных примеров было показано, что если на рынке из однопериодной и двухпериодной облигаций не выполняются неравенства (1.2), а выполняется неравенство (1.4), то такой арбитражный портфель  $h = (u_1, u_2)$  существует, он описан в таблице 1. Нетрудно заметить, что при справедливости неравенства (1.4) тот же самый портфель является арбитражным при существовании трех реализаций  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  короткой ставки в момент  $t = 1$ .

**Примечание.** Фактически изложенные здесь результаты есть иллюстрация леммы Фаркаша на языке цен рынка облигаций: либо существующие при  $t = 0$  цены облигаций являются математическим

ожиданием по некоторой мере от возможных цен при  $t=1$ , либо из этих облигаций можно сформировать арбитражный портфель.

Дальнейшее рассмотрение рынка бескупонных облигаций будет основано на построении моделей, в основе которых лежит предположение о безарбитражности ценообразования облигаций в дискретном времени.

## 2. Построение модели ценообразования

Рассмотрим модель ценообразования на рынке бескупонных облигаций, в основе которой лежат следующие гипотезы и теоремы.

**Предположение 1.** Для любого  $t$  логарифм цены однопериодной облигации определяется формулой

$$\ln b_t^1 = -r_t, \quad \ln b_{t+1}^1 = -r_{t+1}, \quad (2.1)$$

где  $r_t$  так называемая короткая ставка, динамика которой описывается следующей гипотезой.

**Предположение 2.** Короткая ставка изменяется в дискретном времени согласно формуле

$$r_{t+1} = \varphi \cdot r_t + \theta \cdot (1 - \varphi) + [w_0 + w_1 \cdot r_t]^{1/2} \cdot \varepsilon_{t+1}, \quad (2.2)$$

где  $w_0 \geq 0$ ,  $w_1 \geq 0$  и все  $\varepsilon_{t+1}$  независимые при различных  $t$  одинаково распределенные случайные величины и  $\varepsilon_{t+1} \in N(0, 1)$ . При  $w_1 = 0$  модель переходит в модель Васичека [4], а при  $w_0 = 0$  в дискретный аналог модели Кокса-Ингерсолла-Росса [5]. Модель Васичека в физической литературе обычно называют моделью Орнштейна-Уленбека.

**Предположение 3.** Выполняется условие однопериодной безарбитражности рынка облигаций, т.е. цены  $n$  периодной облигации в момент  $t$  определяются условным математическим ожиданием дисконтированной цены  $n-1$  периодной облигации в момент  $t=1$ :

$$b_t^n = E_t \{ m_{t+1} \cdot b_{t+1}^{n-1} \}, \quad b_t^0 = 1 \quad \forall t \quad (2.3)$$

Здесь  $E_t \{ \dots \}$  подразумевает усреднение по мере, связанной с реализацией  $\varepsilon_{t+1}$ , а  $m_{t+1}$  – стохастический дисконтный фактор, зависящий от  $\varepsilon_{t+1}$ .

**Предположение 4.** Стохастический дисконтный фактор определяется короткой ставкой  $r_t$ , случайной величиной  $\varepsilon_{t+1}$  и двумя константами  $\delta$  и  $\lambda$  по следующей формуле:

$$-\ln m_{t+1} = \delta + \gamma \cdot r_t + \lambda \cdot [w_0 + w_1 \cdot r_t]^{1/2} \varepsilon_{t+1}. \quad (2.4)$$

Из предположения 4 вытекает очевидное следствие.

**Следствие 1.** Случайная величина  $m_{t+1}$  имеет логнормальное условное распределение

$$\ln m_{t+1} \in N(-\delta - \gamma \cdot r_t, \lambda^2 \cdot [w_0 + w_1 \cdot r_t]), \quad (2.5)$$

и потому нетрудно доказать прямым вычислением, что логарифм среднего определяется средним от логарифма плюс половина дисперсии от логарифма:

$$\ln E_t \{m_{t+1}\} = E_t \{\ln m_{t+1}\} + \frac{1}{2} \cdot D\{\ln m_{t+1}\} = -\delta - \gamma \cdot r_t + \frac{\lambda^2}{2} [w_0 + w_1 \cdot r_t]. \quad (2.6)$$

**Следствие 2.** Поскольку из предположения 3 и следствия 1 вытекает, что

$$\ln b_t^1 = \ln E_t \{m_{t+1} \cdot b_{t+1}^0\} = \ln E_t \{m_{t+1} \cdot 1\} = -\delta - \gamma \cdot r_t + \frac{\lambda^2}{2} \cdot [w_0 + w_1 \cdot r_t],$$

то для согласования с предположением 2 следует следующее равенство между константами:

$$\delta = \frac{\lambda^2}{2} \cdot w_0, \quad \gamma = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cdot w_1 \quad . \quad (2.7)$$

**Следствие 3**

$$\begin{aligned} \ln b_t^2 &= \ln E_t \{m_{t+1} \cdot b_{t+1}^1\} = \ln E_t \{\exp(-\delta - \gamma \cdot r_t - \lambda \cdot [w_0 + w_1 \cdot r_t]^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_{t+1} - r_{t+1})\} = \\ &= \ln E_t \{\exp(-(\delta + \theta \cdot (1 - \varphi)) - (\gamma + \varphi) \cdot r_t - (1 + \lambda) \cdot [w_0 + w_1 \cdot r_t]^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_{t+1})\} = \\ &= -(\delta + \theta \cdot (1 - \varphi)) - (\gamma + \varphi) \cdot r_t + 0,5 \cdot (\lambda + 1)^2 \cdot [w_0 + w_1 \cdot r_t] = \\ &= 0,5 \cdot (\lambda + 1)^2 \cdot w_0 - (\delta + \theta \cdot (1 - \varphi)) + (0,5 \cdot (\lambda + 1)^2 \cdot w_1 - \gamma - \varphi) \cdot r_t \end{aligned}$$

Или, с учетом следствия 2,

$$\ln b_t^2 = -\theta \cdot (1 - \varphi) + (\lambda + \frac{1}{2}) \cdot w_0 + ((\lambda + \frac{1}{2}) \cdot w_1 - 1 - \varphi) \cdot r_t \quad (2.8)$$

**Теорема.** При выполнении предположений 1-4 цена  $n$ -периодной облигации  $b_t^n$  зависит от времени  $t$  только через значение короткой ставки  $r_t$

$$-\ln b_t^n = A_n + B_n \cdot r_t \quad ; \quad (2.9)$$

при этом, коэффициенты  $A_n, B_n$  не зависят от времени.

Для этих коэффициентов справедлива система рекуррентных уравнений

$$A_{n+1} = A_n + [\theta \cdot (1 - \varphi) - w_0 \cdot \lambda] \cdot B_n - \frac{w_0}{2} \cdot B_n^2,$$

$$B_{n+1} = 1 + (\varphi - w_1 \cdot \lambda) \cdot B_n - \frac{w_1}{2} \cdot B_n^2, \quad (2.10)$$

$$A_0 = A_1 = 0, \quad B_0 = 0, \quad B_1 = 1.$$

Доказательство теоремы проведем методом математической индукции по  $n$ . Для  $n=0$  и  $n=1$ , согласно формуле (2.8), утверждения (2.9)-(2.10) справедливы. Предположим, что они справедливы для  $n$  и докажем для  $n+1$ . Согласно гипотезе 3 о безарбитражности ценообразования облигаций  $\ln b_t^{n+1} = \ln E_t \{m_{t+1} \cdot b_{t+1}^n\} =$

$$\begin{aligned} &= \ln E_t \left\{ \exp \left( -\frac{\lambda^2}{2} \cdot w_0 - \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cdot w_1 \right) \cdot r_t - \lambda \cdot [w_0 + w_1 \cdot r_t]^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_{t+1} - A_n - B_n \cdot r_{t+1} \right) \right\} = \\ &= -A_n - B_n \cdot \theta \cdot (1 - \varphi) - \frac{\lambda^2}{2} \cdot w_0 - \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cdot w_1 - \varphi \cdot B_n \right) \cdot r_t + \frac{1}{2} \cdot (\lambda + B_n)^2 \cdot [w_0 + w_1 \cdot r_t] = \\ &= -[A_n + B_n \cdot (\theta \cdot (1 - \varphi) - \lambda \cdot w_0) - \frac{w_0}{2} \cdot B_n^2] - \left[ 1 + \frac{w_1}{2} \cdot B_n^2 + (\varphi - \lambda \cdot w_1) \cdot B_n \right] \cdot r_t = \\ &= -A_{n+1} - B_{n+1} \cdot r_t. \end{aligned}$$

Сравнение двух последних строк показывает справедливость рекуррентных соотношений (2.10).  $\square$

Для короткой ставки  $r_t$ , динамика которой моделируется уравнением (2.2), справедливы следующие соотношения для условных средних и дисперсий величины  $r_{t+n}$

$$E_t \{r_{t+n}\} = \varphi^n \cdot r_t + \theta \cdot (1 - \varphi^n) \quad (2.11)$$

$$D_t \{r_{t+n}\} = w_0 \cdot \Psi_n^{(0)} + w_1 \cdot \Psi_n^{(1)} \cdot r_t + w_1 \cdot \Psi_n^{(2)} \cdot \theta \cdot (1 - \varphi) \quad (2.12)$$

где коэффициенты  $\Psi_n^{(j)}$   $j=0, 1, 2$  определены равенствами:

$$\Psi_j^{(0)} = \sum_{k=0}^{j-1} \varphi^{2k} = \frac{1 - \varphi^{2j}}{1 - \varphi^2}, \quad \Psi_j^{(1)} = \sum_{k=j-1}^{2 \cdot (j-1)} \varphi^k = \varphi^{j-1} \cdot \frac{1 - \varphi^j}{1 - \varphi} \quad (2.13)$$

$$\Psi_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{j-1} \Psi_k^{(1)} = \frac{1 - \varphi^{j-1} - \varphi^j + \varphi^{2 \cdot j-1}}{(1 - \varphi) \cdot (1 - \varphi^2)}.$$

Доказательства формул (2.11) – (2.13) приведены в Приложении 2. В соотношениях (2.9), (2.10), определяющих безарбитражные цены облигаций, все величины, кроме константы  $\lambda$ , определяются уравнением для короткой ставки (2.2), что является вполне естественным. Константа  $\lambda$

впервые возникла в коэффициенте стохастического дисконтирования (2.4). С учетом (2.7), логарифм этого коэффициента определяется формулой

$$-\ln m_{t+1} = r_t + \frac{\lambda^2}{2} \cdot (w_0 + w_1 \cdot r_t) + \lambda \cdot [w_0 + w_1 \cdot r_t]^{1/2} \varepsilon_{t+1} . \quad (2.14)$$

По смыслу формулы (2.14) константа  $\lambda$  вместе с условной дисперсией  $D_t \{r_{t+1}\} = w_0 + w_1 \cdot r_t$ , (2.15)

найденной по формулам (2.12) – (2.13), и случайной величиной  $\varepsilon_{t+1}$ , фигурирующей в динамическом уравнении для короткой ставки, определяют отклонение коэффициента стохастического дисконтирования  $m_{t+1}$  от «естественной» величины  $E_t \{m_{t+1}\} = \exp(-r_t)$ , зависящей только от короткой ставки  $r_t$ .

Из формул (2.2) и (2.14) следует, что

$$COV_t \{\ln m_{t+1}, r_{t+1}\} = -\lambda \cdot [w_0 + w_1 \cdot r_t],$$

и, принимая во внимание соотношение (2.15), получаем

$$corr_t \{\ln m_{t+1}, r_{t+1}\} = -\lambda \cdot |\lambda|^{-1} \quad (2.16)$$

### 3. Наблюдаемые переменные и латентный параметр $\lambda$

По смыслу используемых в данной работе непрерывных ставок, доходность к погашению  $n$ -периодной облигации в момент  $t$  определяется формулой

$$y_t^n = -\frac{1}{n} \cdot \ln b_t^n . \quad (3.1)$$

В предлагаемой модели безарбитражного ценообразования (2.9) доходность определяется формулой

$$Y_t^n = -\frac{1}{n} \cdot \ln b_t^n = \frac{A_n + B_n \cdot r_t}{n} . \quad (3.2)$$

Для обобщенной модели

$$\frac{A_n + B_n \cdot r_t}{n} = \frac{(\theta \cdot (1 - \varphi) - w_0 \cdot \lambda)}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} B_k - \frac{w_0}{2 \cdot n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} B_k^2 + \frac{B_n \cdot r_t}{n} . \quad (3.3)$$

где  $B_n$  определяется рекуррентным соотношением

$$B_{n+1} = 1 + (\varphi - w_1 \cdot \lambda) \cdot B_n - \frac{w_1}{2} \cdot B_n^2, \quad B_0 = 0 . \quad (3.4)$$

Для формирования такого понятия, как форвардная короткая (однопериодная) ставка  $f_t^1(n, n+1)$  через  $n$  периодов, рассмотрим

гипотетическую куплю-продажу  $n$ - и  $(n+1)$ -периодных бескупонных облигаций в момент времени  $t$ . Разобьем всю операцию на три шага.

Шаг 1. В момент  $t$  продаем  $n$ -периодную облигацию по цене  $b_t^n$ , и покупаем  $(n+1)$ -периодные облигации по цене  $b_t^{n+1}$  в количестве  $\frac{b_t^n}{b_t^{n+1}}$ .

Шаг 2. В момент  $t+n$  выплачиваем единицу денежных средств за  $n$ -периодную облигацию.

Шаг 3. В момент  $t+n+1$  получаем по купленным  $(n+1)$ -периодным облигациям доход в размере  $\frac{b_t^n}{b_t^{n+1}}$  денежных единиц.

Таким образом, мы потратили одну денежную единицу в момент  $t+n$  и получили  $\frac{b_t^n}{b_t^{n+1}}$  денежных единиц в момент  $t+n+1$ . Этой операции можно сопоставить однопериодную доходность  $f_t^1(n, n+1)$  исходя из соотношения

$1 \cdot \exp[f_t^1(n, n+1)] = \frac{b_t^n}{b_t^{n+1}}$ , которое дает

$$f_t^1(n, n+1) = \ln \frac{b_t^n}{b_t^{n+1}}. \quad (3.5)$$

В рассматриваемой модели безарбитражного ценообразования величина короткой форвардной ставки может быть, согласно соотношениям (2.2)-(2.5), представлена следующей формулой

$$\begin{aligned} f_t^1(n, n+1) &= \ln \frac{b_t^n}{b_t^{n+1}} = (A_{n+1} - A_n) + (B_{n+1} - B_n) \cdot r_t = \\ &= [\theta \cdot (1 - \varphi) - w_0 \cdot \lambda] \cdot B_n - \frac{w_0}{2} \cdot B_n^2 + (1 + (\varphi - w_1 \cdot \lambda - 1) \cdot B_n - \frac{w_1}{2} \cdot B_n^2) \cdot r_t = \\ &= B_n \cdot [(\theta - r_t) \cdot (1 - \varphi) - (w_0 + w_1 \cdot r_t) \cdot \lambda] - \frac{1}{2} \cdot B_n^2 \cdot (w_0 + w_1 \cdot r_t) + r_t = \\ &= r_t + B_n \cdot (\theta - r_t) \cdot (1 - \varphi) - (w_0 + w_1 \cdot r_t) \cdot B_n \cdot [\lambda + \frac{1}{2} \cdot B_n]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Как показано в Приложениях 2 и 3, аналитическое выражение для  $B_n$ , подчиняющегося соотношению (3.4), удается найти лишь при  $w_1 = 0$  (дискретная модель Васичека). Именно для этого случая удается в полной мере прояснить роль параметра  $\lambda$  в исходной модели.

В общей исходной модели параметр  $\lambda$  впервые появляется в (2.4) и определяет величину линейного влияния случайного фактора  $\varepsilon_{t+1}$  на  $\ln m_{t+1}$ . При  $\lambda = 0$  стохастический дисконтный фактор (2.4) имеет вид  $m_{t+1} = \exp(-r_t)$ ; в этом случае дисконтирование в момент  $t$  будущей цены в момент  $t+1$  зависит только от текущей короткой ставки  $r_t$  без учета ее возможных изменений под действием случайного фактора  $\varepsilon_{t+1}$ . Согласно формуле (2.16) коэффициент корреляции  $\ln m_{t+1}$  и  $r_{t+1}$  равен  $\text{sign}(-\lambda)$  и, следовательно, он равен единице лишь при отрицательных значениях  $\lambda$ . Поскольку этот параметр не относится к непосредственно наблюдаемым (измеряемым) величинам, будем называть его *латентным параметром* рассматриваемой модели, характеризующим *отношение инвесторов* (или, как говорят, рынка облигаций) *к риску изменения короткой ставки в предстоящем периоде*.

Наиболее выпукло смысл латентного параметра проявляется в формуле форвардной короткой ставки в дискретной модели Васичека [4]

$$f_t^1(n, n+1) = E_t\{r_{t+n}\} - w_0 \cdot \frac{1-\varphi^n}{1-\varphi} \cdot \left[ \lambda + \frac{1-\varphi^n}{2 \cdot (1-\varphi)} \right]. \quad (3.7)$$

Первое слагаемое в (3.7) имеет вид условного математического ожидания для короткой ставки через  $n$  периодов, а второе слагаемое естественно интерпретировать как премию за риск для однопериодной ставки через  $n$  периодов. Анализ формулы (3.7) показывает, что премия за риск положительна при значениях  $\lambda < -[2 \cdot (1-\varphi)]^{-1}$ .

При этом, если  $\lambda < -(1-\varphi)^{-1}$ , то разность  $f_t^1(n, n+1) - E_t\{r_{t+n}\}$  пропорциональна  $w_0 = D_t\{r_{t+1}\}$  и растет **монотонно** с ростом  $n$ .

Для общей модели при  $0 < w_1 \ll 1$  степенная асимптотика по  $w_1$  для  $B_n$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет вид (П3.7) и

$$f_t^1(n, n+1) \rightarrow \theta - \frac{w_0 + w_1 \cdot \theta}{1-\varphi} \cdot \left( \lambda + \frac{1}{2 \cdot (1-\varphi)} \right) \cdot \left[ 1 - \frac{w_1}{1-\varphi} \cdot \left( \lambda + \frac{1}{(1-\varphi)} \right) + O(w_1^2 \cdot (1-\varphi)^{-2}) \right]$$

Поэтому, если  $\lambda < -[2 \cdot (1-\varphi)]^{-1}$ , то асимптотика короткой форвардной ставки через большое число  $n$  периодов будет больше, чем средняя текущая короткая ставка  $\theta$ .

Текущая доходность к погашению  $n$ -периодной облигации (П2.6) в рассматриваемой модели выражается формулой:

$$Y_t^n = \frac{A_n + B_n \cdot r_t}{n} = \left( \theta - \frac{w_0}{1-\varphi} \left( \lambda + \frac{1}{2 \cdot (1-\varphi)} \right) \right) + \quad (3.8)$$

$$+ \left( r_t - \theta + \frac{w_0}{1-\varphi} \left( \lambda + \frac{1}{(1-\varphi)} \right) \right) \cdot \frac{B_n}{n} - \frac{w_0}{2 \cdot (1-\varphi)^2} \cdot \frac{1 - \varphi^{2n}}{(1-\varphi^2) \cdot n}.$$

Величина  $Y_t^n$  монотонно растет с ростом  $n$  в области значений параметров

$$\theta - r_t > \frac{w_0}{1-\varphi} \cdot \left( \lambda + \frac{1}{1-\varphi} \right). \quad (3.9)$$

В этом неравенстве все параметры модели, кроме  $r_t$ , являются константами; величина же  $r_t$  изменчива. Если инвесторы определяют параметр риска неравенством  $\lambda < \frac{-1}{1-\varphi} - \frac{1-\varphi}{w_0} \cdot (\max_t r_t - \theta)$ , это приведет к **монотонному росту доходности** бескупонных облигаций во времени до погашения не только для средних доходностей  $E\{Y_t^n\}$ , но и для текущих доходностей  $Y_t^n$

Предыдущий анализ влияния латентного параметра риска  $\lambda$  приводил лишь к некоторым оценкам сверху для ситуаций, которые часто встречаются на рынке. Поскольку параметр  $\lambda$  определяется в рассматриваемой модели инвесторами, можно интерпретировать его как подгоночный параметр для согласования вычисленных безарбитражных и реально наблюдаемых доходностей бескупонных облигаций всех рассматриваемых сроков погашения.

Реализацию этой программы нетрудно провести в частном случае модели Васичека ( $w_1 = 0$ ). Рассмотрим целевую функцию  $\Phi(\lambda)$  для подгонки латентной переменной  $\lambda$  по наблюдаемым данным доходностей  $y_t^n$ :

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T (Y_t^n - y_t^n)^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \frac{A_n + B_n \cdot r_t}{n} - y_t^n \right)^2. \quad (3.10)$$

Т.к.  $Y_t^n$  является линейной функцией латентного параметра  $\lambda$ , то функция  $\Phi(\lambda)$  является положительно определенной квадратичной функции  $\lambda$ , минимальное значение которой достигается при  $\lambda = \lambda^*$ :

$$\lambda^* = \frac{1-\varphi}{w_0} \cdot \left( \theta - \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T r_t \right) -$$

$$- \frac{1-\varphi}{w_0} \cdot \left( \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{B_n}{n}\right) \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T (y_t^n - r_t) \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{B_n}{n}\right)^2 \right)^{-1} -$$

$$- \frac{1}{2 \cdot (1-\varphi)} \cdot \left( 1 - \left( \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{B_n}{n}\right) \cdot \left( \frac{B_n}{n} - \frac{BB_n}{n} \right) \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{B_n}{n}\right)^2 \right)^{-1} \right)$$

(здесь использовано обозначение Приложения 3:  
 $BB_n = (1 - \varphi^{2n}) \cdot (1 - \varphi^2)^{-1}$ ).

#### 4. Анализ процентных ставок «MosPrime»

В качестве данных мы выбрали процентные ставки московского рынка межбанковских кредитов – MosPrime. MosPrime Rate – Moscow Prime Offered Rate – индикативная ставка предоставления рублёвых кредитов (депозитов) на московском денежном рынке.

Данный показатель формируется Национальной валютной ассоциацией (НВА) на основе объявляемых 8 банками – ведущими операторами рынка МБК депозитных ставок сроками «overnight», 1 неделя, 2 недели, 1, 2, 3, 6 месяцев. В наших обозначениях  $w_1, w_2, m_1, m_2, m_3, m_6$  – ставки депозитов в % годовых соответственно 1 нед, 2 нед, 1 мес, 2 мес, 3 мес, 6 мес. Все данные были взяты с сайта <http://www.nva.ru> и приведены ниже в Приложении 1.

Кредитный контракт на межбанковском рынке можно рассматривать как бескупонную облигацию, поскольку он стандартизирован по объёму и срокам. Котировка данных контрактов происходит в процентных ставках, однако, эти котировки легко перевести в цены облигаций, учитывая зависимость между ценами и ставками.

При выборе недельной ставки в качестве короткой, необходимо, чтобы все перечисленные ставки были кратны по длительности короткой а все вместе согласовывалось бы со ставкой в % годовых. Для единообразного согласования этих требований год был разделен на 48 недель, месяц – на 4 недели. По исходным данным построены наблюдаемые доходности  $y_t^n$ :

$$y_t^1 = \ln\left(1 + \frac{w_1 t}{a}\right), \quad y_t^2 = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{2 \cdot w_2 t}{a}\right), \quad y_t^4 = \frac{1}{4} \ln\left(1 + \frac{4 \cdot m_1 t}{a}\right), \quad a = 4800$$

$$y_t^8 = \frac{1}{8} \ln\left(1 + \frac{8 \cdot m_2 t}{a}\right), \quad y_t^{12} = \frac{1}{12} \ln\left(1 + \frac{12 \cdot m_3 t}{a}\right), \quad y_t^{24} = \frac{1}{24} \ln\left(1 + \frac{24 \cdot m_6 t}{a}\right).$$

В качестве короткой ставки  $r_t$ , для которой строится регрессия (2.2) при  $w_1 = 0$ , выбирается естественно  $y_t^1$ . Результаты построенной регрессии приведены в таблице 2

Таблица 2

Обозначение	Оценка	t statistics	p-level
$\varphi$	0,8284	23,7	0
$\theta \cdot (1 - \varphi)$	$1,117 \cdot 10^{-4}$	4,44	$6 \cdot 10^{-5}$
$\theta$	$6,513 \cdot 10^{-4}$		
$w_0$	$8,612 \cdot 10^{-10}$		

Для 46 наблюдений  $R^2 = 0,927$ , критерий Уайта не отвергает гипотезу об однородности дисперсии, t-статистика единичного корня для равенства  $\varphi = 1$  равна -4,91, в то время как критическая статистика Дики-Фуллера на 5% уровне значимости для нашей модели равна -2,93. Вычисленное оптимальное значение  $\lambda^* = -71213,5$ ; значение целевой функции  $\Phi(\lambda^*) = 9,66 \cdot 10^{-7}$ . Для сравнения приведем значение соответствующей «невязки» при построении регрессии (2.2), оно равно  $5,22 \cdot 10^{-7}$ . и по пяти доходностям лишь вдвое больше «невязки» для одной короткой ставки, что является неплохим результатом.

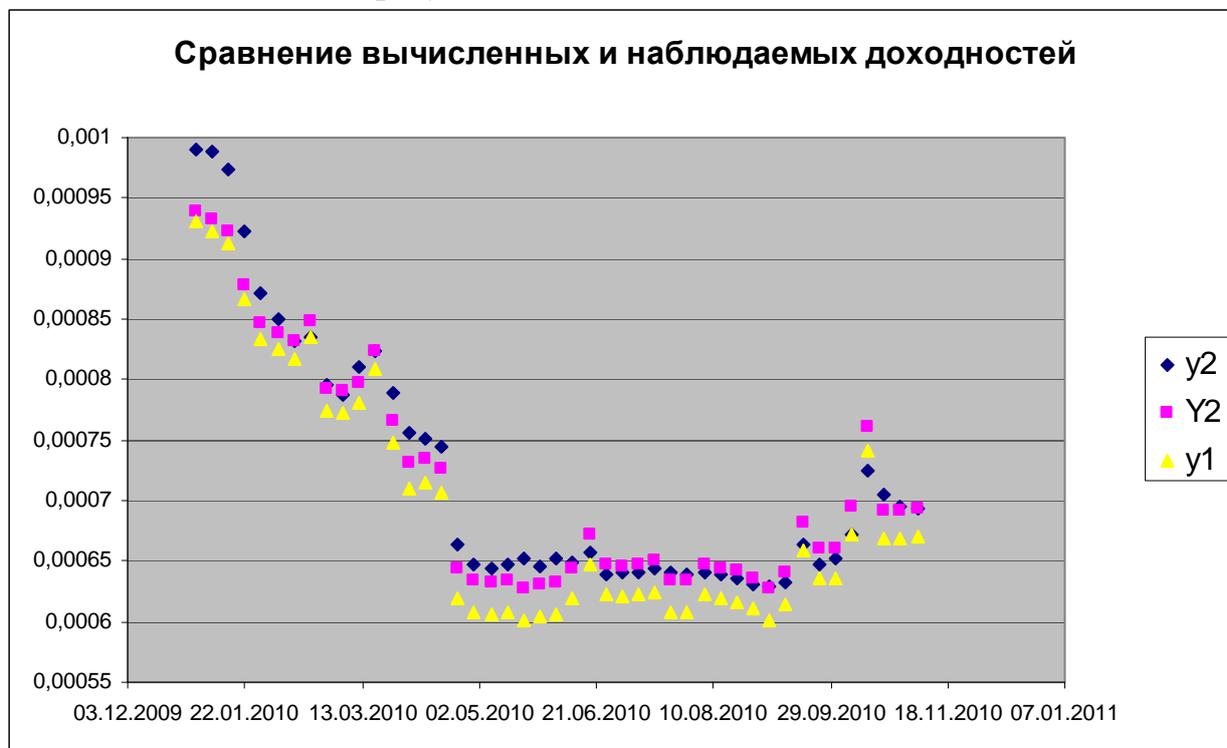


Рис1. Вычисленная ( $Y_2$ ) и наблюдаемые ( $y_2$  и  $y_1$ ) доходности.

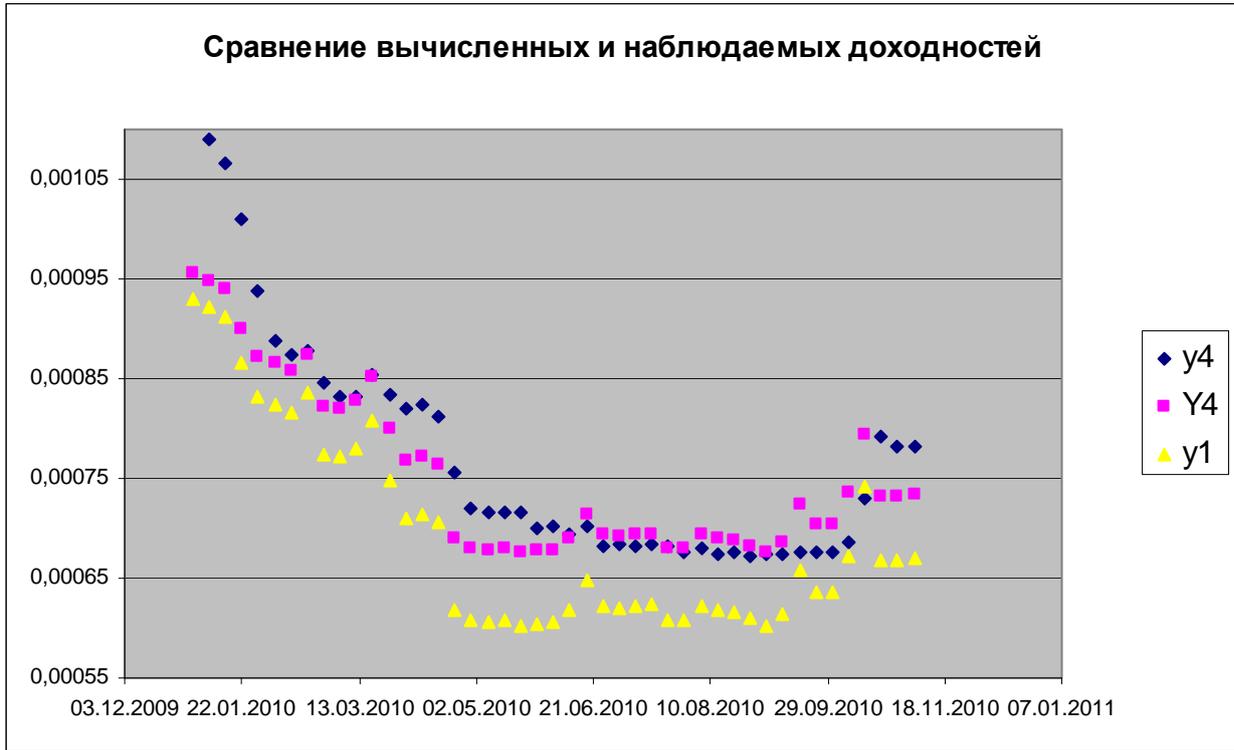


Рис 2. Вычисленная (Y4) и наблюдаемые (y4 и y1) доходности.

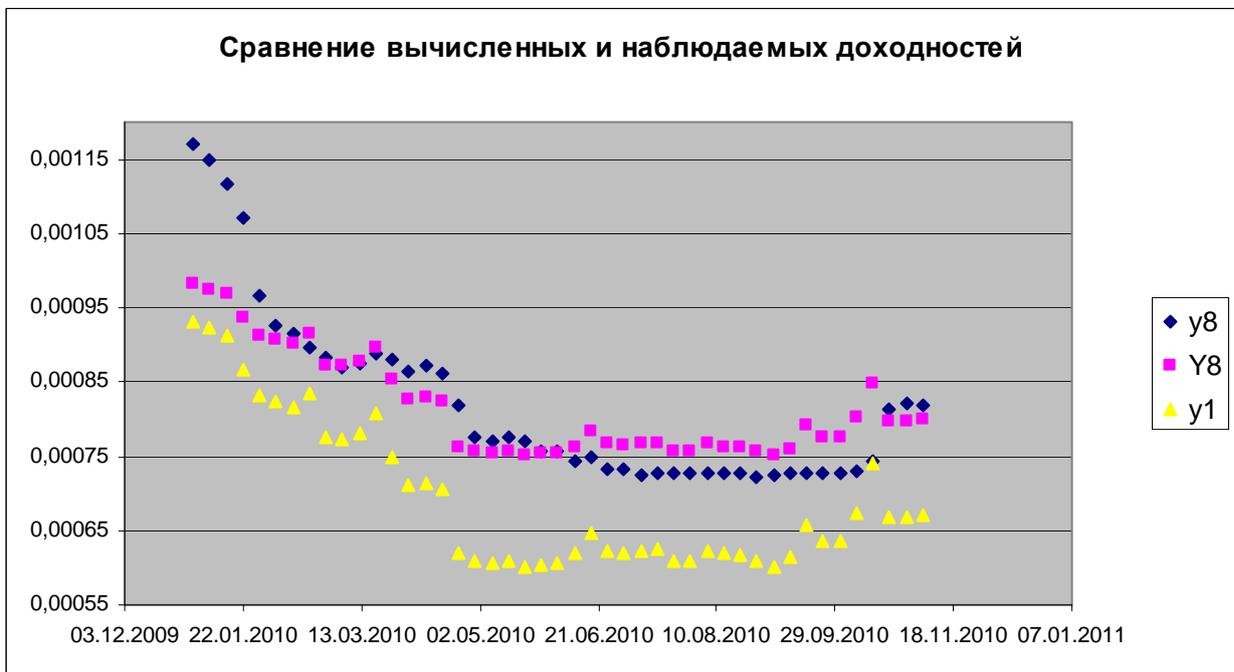


Рис 3. Вычисленная (Y8) и наблюдаемые (y8 и y1) доходности.

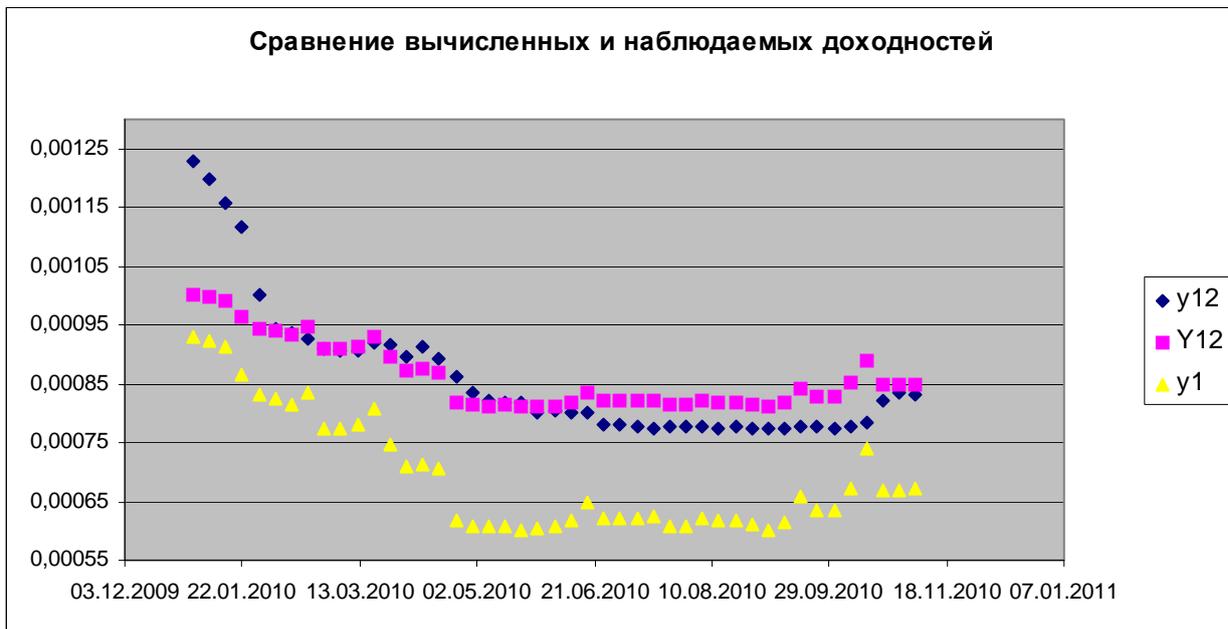


Рис 4. Вычисленная (Y12) и наблюдаемые (y12 и y1) доходности.

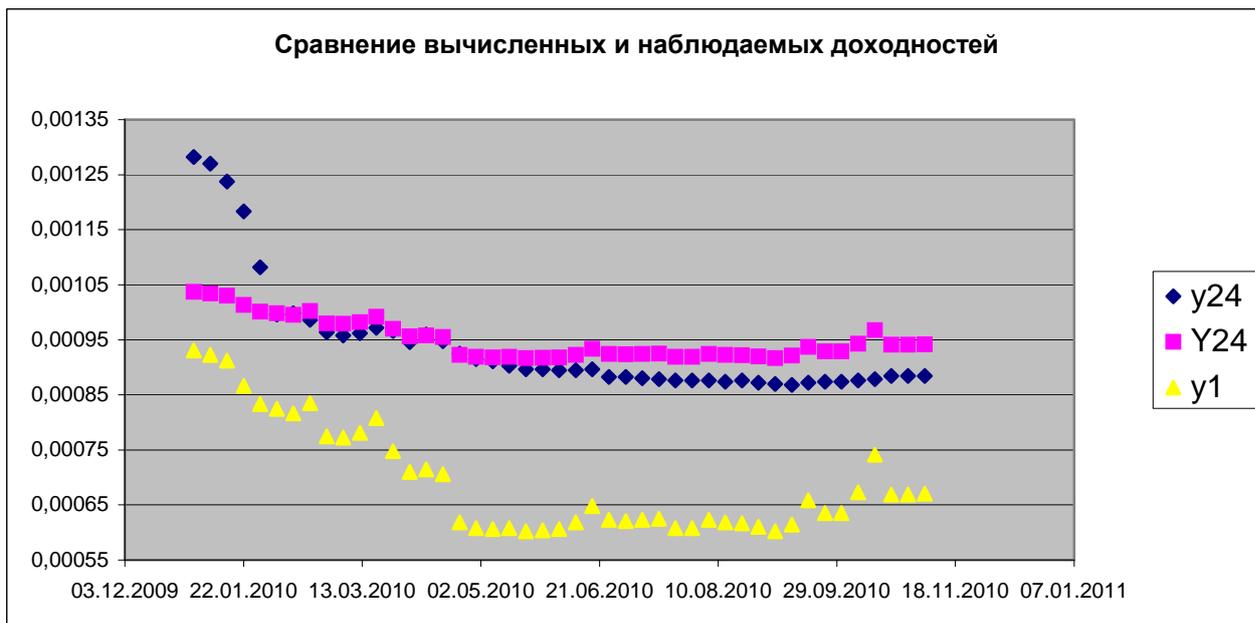


Рис 5. Вычисленная (Y24) и наблюдаемые (y24 и y1) доходности.

Таким образом, мы видим, что применение предлагаемой модели безарбитражного ценообразования бескупонных облигаций к данным кредитного рынка в период девяти месяцев 2010 года, показало хорошее согласие с наблюдениями.

**Данные процентных ставок «MosPrime»**

date	w1	w2	m1	m2	m3	m6
25.12.2009	4,72	5	5,5	5,75	6,01	6,33
01.01.2010	4,47	4,76	5,3	5,65	5,94	6,25
08.01.2010	4,43	4,75	5,24	5,54	5,79	6,19
15.01.2010	4,38	4,68	5,13	5,38	5,6	6,03
22.01.2010	4,16	4,43	4,86	5,16	5,39	5,76
29.01.2010	4	4,19	4,51	4,66	4,84	5,26
05.02.2010	3,96	4,08	4,27	4,46	4,56	4,84
12.02.2010	3,92	4	4,2	4,41	4,53	4,85
19.02.2010	4,01	4,01	4,22	4,32	4,47	4,79
26.02.2010	3,72	3,82	4,07	4,26	4,39	4,68
05.03.2010	3,71	3,78	4	4,19	4,37	4,65
12.03.2010	3,75	3,89	4	4,21	4,38	4,67
19.03.2010	3,88	3,96	4,11	4,28	4,44	4,72
26.03.2010	3,59	3,79	4,01	4,24	4,42	4,69
02.04.2010	3,41	3,63	3,94	4,16	4,33	4,59
09.04.2010	3,43	3,61	3,96	4,2	4,4	4,66
16.04.2010	3,39	3,58	3,9	4,15	4,31	4,6
23.04.2010	2,97	3,19	3,63	3,94	4,16	4,49
30.04.2010	2,92	3,11	3,46	3,73	4,03	4,44
07.05.2010	2,91	3,09	3,44	3,71	3,96	4,42
14.05.2010	2,92	3,11	3,44	3,73	3,95	4,38
21.05.2010	2,89	3,13	3,44	3,71	3,95	4,35
28.05.2010	2,9	3,1	3,36	3,64	3,87	4,35
04.06.2010	2,91	3,13	3,37	3,64	3,88	4,34
11.06.2010	2,97	3,12	3,34	3,58	3,86	4,34
18.06.2010	3,11	3,16	3,37	3,6	3,86	4,35
25.06.2010	2,99	3,07	3,28	3,53	3,77	4,28
02.07.2010	2,98	3,08	3,29	3,53	3,76	4,28
09.07.2010	2,99	3,08	3,28	3,49	3,75	4,27
16.07.2010	3	3,09	3,29	3,5	3,74	4,26
23.07.2010	2,92	3,08	3,28	3,5	3,75	4,25
30.07.2010	2,92	3,07	3,25	3,5	3,75	4,25
06.08.2010	2,99	3,08	3,27	3,5	3,75	4,25
13.08.2010	2,97	3,07	3,24	3,5	3,74	4,24
20.08.2010	2,96	3,05	3,25	3,5	3,75	4,25
27.08.2010	2,93	3,03	3,23	3,48	3,73	4,23
03.09.2010	2,89	3,02	3,24	3,49	3,74	4,22
10.09.2010	2,95	3,04	3,24	3,5	3,73	4,21
17.09.2010	3,16	3,19	3,25	3,5	3,75	4,23
24.09.2010	3,05	3,11	3,25	3,5	3,75	4,24
01.10.2010	3,05	3,13	3,25	3,5	3,74	4,24
08.10.2010	3,23	3,23	3,3	3,51	3,75	4,25
15.10.2010	3,56	3,48	3,51	3,58	3,78	4,26
22.10.2010	3,21	3,39	3,81	3,91	3,96	4,29

**Вычисление условных математических ожиданий и дисперсий  
для короткой ставки с произвольным числом периодов**

Для определения структуры математического ожидания вычислим его для нескольких простых случаев.

$$\begin{aligned} E_t\{r_{t+1}\} &= E_t\{\varphi \cdot r_t + \theta \cdot (1 - \varphi) + [w_0 + w_1 \cdot r_t]^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_{t+1}\} = \\ &= \varphi \cdot r_t + \theta \cdot (1 - \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{t+n-1}\{r_{t+n}\} &= E_t\{\varphi \cdot r_{t+n-1} + \theta \cdot (1 - \varphi) + [w_0 + w_1 \cdot r_{t+n-1}]^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_{t+n}\} = \\ &= \varphi \cdot r_{t+n-1} + \theta \cdot (1 - \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{t+n-2}\{r_{t+n}\} &= E_t\{\varphi \cdot (\varphi \cdot r_{t+n-2} + \theta \cdot (1 - \varphi) + [w_0 + w_1 \cdot r_{t+n-2}]^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_{t+n-1}) + \theta \cdot (1 - \varphi)\} = \\ &= \varphi^2 \cdot r_{t+n-2} + \theta \cdot (1 - \varphi) \cdot (1 + \varphi). \end{aligned}$$

Полученные соотношения позволяют высказать следующую гипотезу

$$E_{t+n-j}\{r_{t+n}\} = \varphi^j \cdot r_{t+n-j} + \theta \cdot (1 - \varphi) \cdot \sum_{k=0}^{j-1} \varphi^k. \quad (\text{П2.1})$$

Доказательство гипотезы (П2.1) нетрудно провести методом математической индукции

$$\begin{aligned} E_{t+n-j-1}\{r_{t+n}\} &= E_{t+n-j-1}\{\varphi^j \cdot (\varphi \cdot r_{t+n-j-1} + \theta \cdot (1 - \varphi) + [w_0 + w_1 \cdot r_{t+n-j-1}]^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_{t+n-j}) + \\ &+ \theta \cdot (1 - \varphi) \cdot \sum_{k=0}^{j-1} \varphi^k\} = \varphi^{j+1} \cdot r_{t+n-j-1} + \theta \cdot (1 - \varphi) \cdot \sum_{k=0}^j \varphi^k. \end{aligned}$$

Используя формулу (П2.1), легко получить интересующее нас условное математическое ожидание

$$\begin{aligned} E_t\{r_{t+n}\} &= E_{t+n-n}\{r_{t+n}\} = \varphi^n \cdot r_{t+n-n} + \theta \cdot (1 - \varphi) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^k = \\ &= \varphi^n \cdot r_t + \theta \cdot (1 - \varphi^n). \end{aligned}$$

Условная дисперсия

$$D_t\{r_{t+n}\} = E_t\{(r_{t+n} - E_t\{r_{t+n}\})^2\} = E_t\{(r_{t+n})^2\} - (E_t\{r_{t+n}\})^2$$

определяется двумя средними, одно из которых  $E_t\{r_{t+n}\}$  уже найдено.

Вычисление второго начнем с вычисления вспомогательного условного математического ожидания  $E_{t+n-j}\{(r_{t+n})^2\}$ . Вычислим эту величину для нескольких значений  $j = 1, 2, 3$  :

$$\begin{aligned}
E_{t+n-1}\{(r_{t+n})^2\} &= E_{t+n-1}\{(\varphi \cdot r_{t+n-1} + \theta \cdot (1-\varphi) + [w_0 + w_1 \cdot r_{t+n-1}]^{1/2} \cdot \varepsilon_{t+n})^2\} = \\
&= (E_{t+n-1}\{r_{t+n}\})^2 + [w_0 + w_1 \cdot r_{t+n-1}], \\
E_{t+n-2}\{(r_{t+n})^2\} &= E_{t+n-2}\{(\varphi \cdot (\varphi \cdot r_{t+n-2} + \theta \cdot (1-\varphi) + [w_0 + w_1 \cdot r_{t+n-2}]^{1/2} \cdot \varepsilon_{t+n-1}) + \\
&+ \theta \cdot (1-\varphi))^2 + [w_0 + w_1 \cdot (\varphi \cdot r_{t+n-2} + \theta \cdot (1-\varphi) + [w_0 + w_1 \cdot r_{t+n-2}]^{1/2} \cdot \varepsilon_{t+n-1})]\} = \\
&= (E_{t+n-2}\{r_{t+n}\})^2 + w_0 \cdot (1 + \varphi^2) + w_1 \cdot (\varphi + \varphi^2) \cdot r_{t+n-2} + w_1 \cdot \theta \cdot (1-\varphi).
\end{aligned}$$

Примем гипотезу, что искомая формула имеет следующую структуру

$$\begin{aligned}
E_{t+n-j}\{(r_{t+n})^2\} &= (E_{t+n-j}\{r_{t+n}\})^2 + \\
&+ w_0 \cdot \Psi_j^{(0)} + w_1 \cdot \Psi_j^{(1)} \cdot r_{t+n-j} + w_1 \cdot \Psi_j^{(2)} \cdot \theta \cdot (1-\varphi).
\end{aligned} \tag{П2.2}$$

Тогда увеличение параметра  $j$  на единицу определит рекуррентные соотношения между соседними по  $j$  коэффициентами  $\Psi_j^{(i)}$ :

$$\begin{aligned}
\Psi_{j+1}^{(0)} &= \Psi_j^{(0)} + \varphi^{2j}, \quad \Psi_0^{(0)} = 0 \Rightarrow \Psi_j^{(0)} = \sum_{k=0}^{j-1} \varphi^{2k} = \frac{1 - \varphi^{2j}}{1 - \varphi^2}, \\
\Psi_{j+1}^{(1)} &= \varphi \cdot \Psi_j^{(1)} + \varphi^{2j}, \quad \Psi_0^{(1)} = 0 \Rightarrow \Psi_j^{(1)} = \sum_{k=j-1}^{2 \cdot (j-1)} \varphi^k = \varphi^{j-1} \cdot \frac{1 - \varphi^j}{1 - \varphi} \\
\Psi_{j+1}^{(2)} &= \Psi_j^{(2)} + \Psi_j^{(1)}, \quad \Psi_1^{(2)} = 0 \Rightarrow \Psi_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{j-1} \Psi_k^{(1)} = \frac{1 - \varphi^{j-1} - \varphi^j + \varphi^{2j-1}}{(1 - \varphi) \cdot (1 - \varphi^2)}.
\end{aligned} \tag{П2.3}$$

Теперь несложно вычислить и интересующую нас условную дисперсию, воспользовавшись формулой (П2.2) при  $j = n$

$$\begin{aligned}
D_t\{r_{t+n}\} &= E_t\{(r_{t+n})^2\} - (E_t\{r_{t+n}\})^2 = \\
&= w_0 \cdot \Psi_n^{(0)} + w_1 \cdot \Psi_n^{(1)} \cdot r_t + w_1 \cdot \Psi_n^{(2)} \cdot \theta \cdot (1-\varphi).
\end{aligned} \tag{П2.4}$$

Заметим, что пределы условной дисперсии короткой ставки через большое количество периодов и минимально возможное количество периодов равны соответственно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_t\{r_{t+n}\} = \frac{w_0 + w_1 \cdot \theta}{1 - \varphi^2}, \quad \lim_{n \rightarrow 1} D_t\{r_{t+n}\} = w_0 + w_1 \cdot r_t.$$

Величина безусловной дисперсии определяется формулой (П2.4) при замене величины  $r_t$  на  $\theta = E\{r_t\}$

$$D\{r_{t+n}\} = (w_0 + w_1 \cdot \theta) \cdot \frac{1 - \varphi^{2n}}{1 - \varphi^2}.$$

**Решение системы рекуррентных уравнений при  $w_1 = 0$**

В случае, когда в уравнении (2.2) для короткой ставки  $w_1 = 0$ , то система рекуррентных уравнений для коэффициентов  $A_n, B_n$  (дискретная модель Васичека) имеет вид

$$A_{n+1} = A_n + [\theta \cdot (1 - \varphi) - w_0 \cdot \lambda] \cdot B_n - \frac{w_0}{2} \cdot B_n^2, \quad A_0 = 0, \quad (\text{ПЗ.1})$$

$$B_{n+1} = 1 + \varphi \cdot B_n, \quad B_0 = 0,$$

и имеет точное решение.

Второе в (ПЗ.1) уравнение для  $B_n$  имеет очевидное явное решение

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^k = \frac{1 - \varphi^n}{1 - \varphi} \quad \text{при } \varphi \neq 1 \quad \text{и} \quad B_n = n \quad \text{при } \varphi = 1. \quad (\text{ПЗ.2})$$

Решение первого в (ПЗ.1) уравнения для  $A_n$  легко найти, просуммировав это уравнение по  $n$  и приняв во внимание (ПЗ.2)

$$\begin{aligned} A_n &= (\theta \cdot (1 - \varphi) - w_0 \cdot \lambda) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - \varphi^k}{1 - \varphi} - \frac{w_0}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1 - \varphi^k)^2}{(1 - \varphi)^2} = \\ &= \theta \cdot \left( n - \frac{1 - \varphi^n}{1 - \varphi} \right) - \frac{w_0 \cdot \lambda}{1 - \varphi} \cdot \left( n - \frac{1 - \varphi^n}{1 - \varphi} \right) - \frac{w_0}{2 \cdot (1 - \varphi)^2} \cdot \left( n - 2 \cdot \frac{1 - \varphi^n}{1 - \varphi} + \frac{1 - \varphi^{2n}}{1 - \varphi^2} \right). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что при  $\varphi = 1$

$$A_n = 0 \cdot \theta - \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \lambda \cdot w_0 - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} \cdot \frac{w_0}{2}, \quad B_n = n;$$

при  $\varphi = 0$

$$A_n = (n-1) \cdot \theta - (n-1) \cdot \lambda \cdot w_0 - (n-1) \cdot \frac{w_0}{2}, \quad B_n = 1.$$

По определению, доходность  $n$ -периодной бескупонной облигации к погашению в данной модели выражается формулой

$$Y_t^n = -\frac{1}{n} \cdot \ln b_t^n = \frac{A_n + B_n \cdot r_t}{n}. \quad (\text{ПЗ.3})$$

Дальнейшие формулы рассматриваются в области  $0 < \varphi < 1$ . Безусловные математическое ожидание и дисперсия доходности к погашению

$$E\{Y_t^n\} = \frac{A_n + B_n \cdot \theta}{n}, \quad D\{Y_t^n\} = \frac{B_n^2}{n^2} \cdot E\{(r_t - \theta)^2\} = \frac{B_n^2}{n^2} \cdot \frac{w_0}{1 - \varphi^2}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\frac{A_n}{n} &= \left(1 - \frac{B_n}{n}\right) \cdot \theta + \left(-1 + \frac{B_n}{n}\right) \frac{\lambda \cdot w_0}{1 - \varphi} + \frac{1}{(1 - \varphi)^2} \cdot \left(-1 + 2 \cdot \frac{B_n}{n} - \frac{1 - \varphi^{2n}}{n \cdot (1 - \varphi^2)}\right) \cdot \frac{w_0}{2} = \\ &= \left(\theta - \frac{\lambda \cdot w_0}{1 - \varphi} - \frac{w_0}{2 \cdot (1 - \varphi)^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{B_n}{n}\right) + \frac{w_0}{2 \cdot (1 - \varphi)^2} \cdot \left(\frac{B_n}{n} - \frac{1 - \varphi^{2n}}{(1 - \varphi^2) \cdot n}\right).\end{aligned}$$

Поскольку  $\frac{B_n}{n}$  и  $\frac{BB_n}{n} = \frac{1 - \varphi^{2n}}{(1 - \varphi^2) \cdot n}$  – монотонно убывающие с ростом  $n$

функции, средняя доходность погашения  $n$ -периодной облигации

$$\begin{aligned}\frac{A_n + B_n \cdot \theta}{n} &= \left(\theta - \frac{w_0}{1 - \varphi} \left(\lambda + \frac{1}{2 \cdot (1 - \varphi)}\right)\right) + \\ &+ \frac{w_0}{1 - \varphi} \left(\lambda + \frac{1}{1 - \varphi}\right) \cdot \frac{B_n}{n} - \frac{w_0}{2 \cdot (1 - \varphi)^2} \frac{BB_n}{n}\end{aligned}$$

монотонно растет с ростом  $n$  при  $\lambda < -(1 - \varphi)^{-1}$ . При расширении области возможных значений  $\lambda$  до  $\lambda < -[2 \cdot (1 - \varphi)]^{-1}$  обеспечивает неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{Y_t^n\} = \theta - \left(\lambda + \frac{1}{2 \cdot (1 - \varphi)}\right) \cdot \frac{w_0}{1 - \varphi} > \theta.$$

Текущая доходность погашения  $n$ -периодной облигации (ПЗ.3) в рассматриваемой модели выражается формулой:

$$\begin{aligned}Y_t^n &= \frac{A_n + B_n \cdot r_t}{n} = \left(\theta - \frac{w_0}{1 - \varphi} \left(\lambda + \frac{1}{2 \cdot (1 - \varphi)}\right)\right) + \\ &+ \left(r_t - \theta + \frac{w_0}{1 - \varphi} \left(\lambda + \frac{1}{1 - \varphi}\right)\right) \cdot \frac{B_n}{n} - \frac{w_0}{2 \cdot (1 - \varphi)^2} \cdot \frac{1 - \varphi^{2n}}{(1 - \varphi^2) \cdot n}.\end{aligned}$$

Величина  $Y_t^n$  монотонно растет с ростом  $n$  в области значений параметров  $\theta - r_t > \frac{w_0}{1 - \varphi} \cdot \left(\lambda + \frac{1}{1 - \varphi}\right)$ .

Следует заметить, что в этом неравенстве все параметры модели, кроме  $r_t$ , являются константами. Величина же  $r_t$  изменчива, и если инвесторы определяют параметр риска неравенством  $\lambda < \frac{-1}{1 - \varphi} - \frac{1 - \varphi}{w_0} \cdot (\max_t r_t - \theta)$ , это приведет к монотонному росту во времени доходности бескупонных облигаций вплоть до момента погашения не только для средних доходностей  $E\{Y_t^n\}$ , но и для текущих доходностей  $Y_t^n$ .

**Квадратичная рекуррентная последовательность**

Заметим, что произвольная рекуррентная последовательность  $x_{n+1} = a \cdot x_n^2 + b \cdot x_n + c$  при  $a \neq 0$  может быть преобразована к виду

$$z_{n+1} = z_n^2 + \delta, \tag{П4.1}$$

где  $z_n = a \cdot x_n + 0,5 \cdot b$ ,  $\delta = a \cdot c - 0,25 \cdot b^2 + 0,5 \cdot b$ . При  $\delta > 0,25$  любая начальная точка  $z_0$  уходит в бесконечность:  $z_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Неподвижными точками отображения (П4.1) являются  $\zeta_{1,2} = 0,5 \cdot (1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \delta})$ . Они возникают из ничего при  $\delta \rightarrow 0,25 + 0$  в виде двух слипшихся неподвижных точек  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,5$ . При  $\delta < 0,25$  эти неподвижные точки расходятся:  $\zeta_1 \rightarrow \infty$ ,  $\zeta_2 \rightarrow -\infty$  при  $\delta \rightarrow -\infty$ . Нетрудно показать, что если начальная точка  $z_0$  удовлетворяет неравенству  $|z_0| > \zeta_1$ , то  $z_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Численные вычисления показывают, что при  $\delta < -2$  почти любое начальное значение  $z_0$  приводит к  $z_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, нетривиальное поведение последовательности (П4.1) реализуется лишь в области  $-2 < \delta < 0,25$ .

Исследуем эти неподвижные точки  $\zeta_{1,2}$  на устойчивость:

$$z_n = \zeta + \Delta_n, \quad z_{n+1} = \zeta + \Delta_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1} = 2 \cdot \zeta \cdot \Delta_n + O(\Delta_n^2).$$

Поскольку  $\zeta_1 = 0,5 \cdot (1 + \sqrt{1 - 4 \cdot \delta}) \geq 0,5$ , то неподвижная точка  $\zeta_1$  неустойчива при любом значении  $\delta \leq 0,25$ . А поскольку неподвижная точка  $\zeta_2 = 0,5 \cdot (1 - \sqrt{1 - 4 \cdot \delta}) \leq 0,5$ , то она является устойчивой при  $-0,75 < \delta < 0,25$  и теряет устойчивость при  $\delta = -0,75$ .

В области  $\delta < -0,75$  возникает так называемый 2-цикл или решение уравнения двойного отображения, возвращающееся в исходную точку:

$$z_{n+2} = \phi_2(z_n) = (z_n^2 + \delta)^2 + \delta = z_n^4 + 2 \cdot \delta \cdot z_n^2 + \delta^2 + \delta, \quad z_{n+2} = z_n.$$

Решение этой системы уравнений сводится, естественно, к решению одного алгебраического уравнения четвертого порядка:

$$z^4 + 2 \cdot \delta \cdot z^2 - z + \delta^2 + \delta = 0 \Rightarrow (z^2 - z + \delta) \cdot (z^2 + z + 1 + \delta) = 0. \tag{П4.2}$$

Первый множитель в (П4.2) определяет, очевидно, уже исследованные неподвижные точки  $\zeta_{1,2}$ . Второй множитель имеет при  $\delta < -0,75$  два действительных корня:

$$\zeta_1^{(2)} = 0,5 \cdot (-1 + \sqrt{-3 - 4 \cdot \delta}), \quad \zeta_2^{(2)} = 0,5 \cdot (-1 - \sqrt{-3 - 4 \cdot \delta}),$$

которые обладают следующими свойствами:

$\zeta_2 < \zeta_1^{(2)} < \zeta_1$ ,  $\zeta_2^{(2)} < \zeta_2$ ,  $\zeta_1^{(2)} < 0$  при  $\delta > -1$  и  $\zeta_1^{(2)} > 0$  при  $\delta < -1$ .

Устойчивость неподвижных точек  $\zeta_{1,2}^{(2)}$  определяется устойчивостью отображения  $z_{n+2} = \phi_2(z_n)$ . Оно будет устойчивым в точках  $\zeta_{1,2}^{(2)}$ , если в этих точках модуль производной  $\frac{d}{dz}\phi_2(z)$  будет меньше единицы. Такое

неравенство с учетом определения  $\zeta_{1,2}^{(2)}$  приводит к простому условию  $|4 \cdot (1 + \delta)| < 1$ , что в свою очередь влечет двойное неравенство на область значений параметра  $\delta$ , обеспечивающую устойчивость неподвижных точек  $\zeta_{1,2}^{(2)}$ :  $-1,25 < \delta < -0,75$

Дальнейшее уменьшение параметра  $\delta$  ведет к потере устойчивости 2-цикла и к появлению 4-цикла. Подробно о поведении квадратичных рекуррентных последовательностях изложено в работах [9,10]

Для квадратичной последовательности, возникающей в рассматриваемой модели (2.10)

$$B_{n+1} = 1 + \alpha \cdot B_n - \beta \cdot B_n^2 \quad (\text{П4.3})$$

замена переменных и параметров

$$Z_n = -\beta \cdot B_n + \frac{\alpha}{2}, \quad \delta = -\beta - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \cdot [1 - (\alpha - 1)^2 - 4 \cdot \beta] < \frac{1}{4} \quad \text{при } \beta > 0$$

приводит к виду  $Z_{n+1} = Z_n^2 + \delta$ . Так как по условию задачи  $B_0 = 0$ , то  $Z_0 = 0,5 \cdot \alpha$ ,  $Z_1 = 0,5 \cdot \alpha - \beta$ ,  $Z_2 = (0,5 \cdot \alpha - \beta)^2 + 0,25 \cdot (\alpha - 1)^2 + 0,25 - \beta > 0$ .

Как следует из предыдущего анализа последовательности (П4.1), для произвольного значения параметров  $\alpha, \beta$  не удастся получить решение в явном виде. Однако, если параметры модели таковы, что

$0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta \ll 1$ ,  $\beta \cdot (1 - \alpha) \ll 1$ , то при больших  $n$  устойчивое решение

$$Z_n \rightarrow \zeta_2 = 0,5 \cdot (1 - \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4 \cdot \beta}) \approx 0,5 \cdot \alpha - \beta \cdot (1 - \alpha)^{-1} \quad \text{и}$$

$$B_n \rightarrow (1 - \alpha)^{-1} - \beta \cdot (1 - \alpha)^{-3} + O(\beta^2 \cdot (1 - \alpha)^{-5}).$$

Если  $\alpha = \varphi - w_1 \cdot \lambda$ ,  $\beta = 0,5 \cdot w_1$ , то

$$B_n \rightarrow (1 - \varphi + w_1 \cdot \lambda)^{-1} - 0,5 \cdot w_1 \cdot (1 - \varphi + w_1 \cdot \lambda)^{-3} + O(w_1^2) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что если в рекуррентной последовательности (П4.3) величина  $w_1 = 0$ , то  $B_n = (1 - \varphi^n) \cdot (1 - \varphi)^{-1}$  и при больших  $n$  стремится к  $(1 - \varphi)^{-1}$  при  $\varphi \neq 1$ . Налицо хорошая согласованность асимптотик при  $n \rightarrow \infty$ .

В заключение авторы приносят благодарность редактору сборника В.З.Беленькому за полезные замечания.

### *Литература*

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1. Факты, Модели. М.: Фазис, 1998, 512 с. Том 2. Теория. М.: Фазис, 1998, 543 с.
2. Cochrane J. Asset Pricing. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2005.
3. Duffie D., R. Kan. A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, 6, 1996, pp. 379 – 406.
4. Vasicek O., An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Econometrics*, 1977, Vol.5, p. 177-188.
5. Cox J.C., Ingersoll J., Ross S., A., A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, 1985, 53, p. 385-407.
6. Anatolyev S., Korepanov S The term structure of Russian interest rates. *Applied Economics Letters*, Vol. 10, № 13, 2003, pp. 867–870.
7. Бьорк Т. Теория арбитража в непрерывном времени. – М.:МЦНМО, 2010, 560 с.
8. Дробышевский С. Анализ рынка ГКО на основе изучения временной структуры процентных ставок. Институт экономики переходного периода. Научные труды № 17Р. – М.: 1999 .
9. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Парадоксы мира нестационарных структур. В кн. «Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание». М.: Наука, 1988, с. 44-122.
10. Шапиро А.П., Луппов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии, М.: Наука, 1983, 134 с.

### **Структура оптимальной инвестиционной стратегии в динамической модели риска с диффузионным возмущением<sup>1</sup>**

Во многих работах, посвященных проблемам управления и оценки риска платежеспособности страховых компаний, участвующих на финансовом рынке, было показано, что рискованные активы при их правильном применении могут стать эффективным инструментом компенсации собственного риска страховщика. Точнее, оптимальный (вообще говоря, динамический) выбор структуры инвестиционного портфеля, определяемой в простейшем случае долей рискованного актива (акций), позволяет значительно повысить такую характеристику платежеспособности, как вероятность неразорения (см., например, обзор в [1]). При этом если безрисковый актив (банковский счет) может рассматриваться как основной инструмент, способствующий аккумуляции капитала компании (что также влечет большую финансовую устойчивость и рост платежеспособности), то рискованный актив наиболее эффективен (и доминирует в этом смысле над безрисковым) в области больших значений собственного риска страховщика.

Об этом говорят, в частности, исследования структуры оптимального управления инвестициями в классической модели Крамера-Лундберга при наличии бюджетных ограничений и более общих ограничений на структуру портфеля (см. [1], [2], а также [3]). В этих работах показано, что, если есть ограничения на долю резерва, вкладываемого в акции, то при значениях капитала, близких к нулю, т.е. в зоне большого собственного риска, оптимальным будет вложение в акции на максимально допустимом уровне. При достаточно больших значениях капитала, т.е. при переходе в более стабильную зону, оптимальная доля вложения в рискованные активы уменьшается. В частности, в случае страхования малых рисков (при экспоненциальном распределении размера требований) эта доля с ростом капитала убывает до нуля, при этом количество средств, вкладываемых в акции, стремится к некоторой положительной константе (см. [4]). В то же время, если речь идет о страховании крупных рисков (размер требований имеет распределение с тяжелыми хвостами, например, распределение Парето), то, как показано, в [5], оптимальное количество средств, вкладывае-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 10-01-00767, 11-01-00219

мых в акции, будет неограниченно расти с ростом капитала. Таким образом, компенсаторная функция рисков активов продолжает в данном случае работать и при больших размерах капитала, который все же может оказаться недостаточным для покрытия крупных исков, возникающих с большой вероятностью, и тогда риск разорения остается достаточно большим.

Оптимальная структура инвестиционного портфеля, состоящего из двух активов, точнее, оптимальная доля вложения в акции (при минимизации вероятности разорения на бесконечном интервале времени) является функцией текущего капитала, зависящей от решения уравнения Беллмана. Упомянутые выше результаты, относящиеся к структуре оптимальной стратегии при малых значениях капитала, могут быть получены при исследовании асимптотики функции Беллмана вблизи нуля (см., например, [1], [3]).

Целью настоящей работы является исследование асимптотики функции Беллмана в нуле и получение структуры оптимального управления в области малых значений начального капитала, т.е. в области больших рисков, в модификации модели Крамера-Лундберга, предполагающей случайность процесса поступления премий. Точнее, будет рассматриваться модель, в которой детерминированный процесс премий из классической модели возмущен диффузионной составляющей. Задача оптимального управления в такой модели исследовалась в работе [6], в которой, однако, указанные вопросы не исследовались и которая, по нашему мнению, содержит утверждение, приводящее к возможности неверного понимания структуры оптимальной стратегии при малых значениях капитала. В частности, в [6] утверждается, что при нулевом капитале оптимальные вложения в акции должны быть нулевыми, и оптимальная стратегия строится как непрерывная функция с учетом этого факта как начального условия. Но данное начальное условие, имеющее место как факт классической модели, не находит подтверждения в наших исследованиях модели с диффузионным возмущением. Заметим также, что оно не имеет места и в модели с чисто диффузионным процессом риска (см. [7]), где, в частности, при нулевой процентной ставке оптимальная стратегия диктует вкладывать некоторое постоянное (не зависящее от размера капитала) положительное количество денежных средств в акции. Это связано с тем, что применение диффузионной аппроксимации при описании процессов риска приводит к сильным искажениям структуры оптимального управления при малых значениях капитала по сравнению с исходной моделью, так как наличие диффузион-

ной составляющей делает неизбежным разорение при нулевом начальном капитале.

## 1. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим процесс риска следующего вида:

$$R_t = u + ct + \sigma_r W_t^r - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad (1)$$

где  $R_t$  - величина капитала страховой компании в момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ ;  $u$  - величина начального капитала;  $c$  - интенсивность поступления страховых премий (в данном случае ожидаемая величина взносов в единицу времени);  $W_t^r$  - стандартный винеровский процесс, с помощью которого моделируются случайные отклонения процесса поступления премий от детерминированного процесса  $ct$ ,  $t \geq 0$ , в классической модели;  $\sigma_r > 0$ ;  $N_t$ ,  $t \geq 0$ , - пуассоновский процесс с параметром  $\lambda$ , определяющий для каждого  $t$  число предъявленных исков за временной промежуток  $(0, t]$ ;  $Z_1, Z_2, \dots$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) с некоторой функцией распределения  $F(z)$  ( $F(0) = 0$ ,  $EZ_1 = m < \infty$ ), представляющих собой величины последовательных страховых выплат, которые, кроме того, не зависят от процесса  $\{N_t\}$ . Процессы  $W_t^r$  и сложный пуассоновский процесс  $Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$  также предполагаются независимыми.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда капитал (полностью или частично) инвестируется в акции, цена которых описывается с помощью геометрического броуновского движения:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t),$$

где  $S_t$  - цена акции в момент  $t$ ,  $\mu$  - ожидаемая доходность акции,  $\sigma > 0$  - волатильность,  $\{w_t\}$  - стандартный винеровский процесс, независимый от процессов  $W_t^r$  и  $Y_t$ . Будем также считать, что оставшаяся часть капитала вкладывается в банк при постоянной процентной ставке  $r$  ( $0 \leq r < \mu$ ); уравнение банковского счета при этом имеет вид  $dB_t = rB_t dt$ . Допускается также, что количество денежных средств  $A_t$ , вкладываемых в акции в момент времени  $t$ , больше текущего капитала, что предполагает заимствование дополнительных средств по той же процентной ставке. Тогда, если  $A_t$  - количество денег, вкладываемых в акции в момент времени  $t$ , то изменение

капитала описывается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) (см. [6])

$$dX_t = (rX_t + (\mu - r)A_t + c)dt + \sigma A_t dw_t + \sigma_r dW_t^r - dY_t. \quad (2)$$

Далее будем предполагать, что  $\mathbf{A} = \{A_t\}_{t \geq 0}$  - допустимое неупреждающее управление, т.е. случайный процесс, адаптированный относительно соответствующей фильтрации, и такой, что  $\int_0^T A_t^2 dt < \infty$  п.н. для всех  $T > 0$ .

Обозначим  $\varphi^{\mathbf{A}}(u) = \mathbf{P}\{X_t \geq 0, t \geq 0\}$  - вероятность неразорения в течение бесконечного интервала времени как функцию начального капитала  $u$  для процесса  $X_t = X_t^{\mathbf{A}}$  вида (2), порожденного управлением  $\mathbf{A}$ ,  $\psi^{\mathbf{A}}(u) = 1 - \varphi^{\mathbf{A}}(u)$  - вероятность разорения. Функция Беллмана в задаче максимизации вероятности неразорения определяется следующим образом:

$$V(x) = \sup_{\mathbf{A}} \{\varphi^{\mathbf{A}}(x)\},$$

где супремум берется по множеству всевозможных допустимых управлений.

Используя обобщенную формулу Ито, нетрудно получить, что инфинитезимальный оператор  $I^{\mathbf{A}}$  марковского процесса (2) при  $A_t \equiv A$ , где  $A$  - некоторая константа, определенный на подходящем классе функций  $g(x)$ , задается следующим равенством (см. также [6]):

$$I^{\mathbf{A}}g(x) = [A(\mu - r) + c + r \cdot x]g'(x) + \frac{1}{2}[A^2\sigma^2 + \sigma_r^2]g''(x) + \lambda E[g(x - Z) - g(x)],$$

где  $Z$  - с.в. с функцией распределения  $F(z)$ . Тогда уравнение Беллмана в задаче максимизации вероятности неразорения на бесконечном интервале времени имеет вид

$$\sup_{\mathbf{A}} I^{\mathbf{A}}V(x) = 0, \quad (3)$$

где супремум берется по всем  $A \in \mathbf{R}$ . Предполагая, что выполнены естественные свойства:

$$V'(x) > 0, \quad V''(x) < 0 \quad (4)$$

(в случае невыполнения последнего неравенства в (4) супремум в (3) не существовал бы), получаем, что указанный супремум достигается при

$$A^* = A^*(x) = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V'(x)}{V''(x)}. \quad (5)$$

Подставив это выражение в исходное уравнение Беллмана, получим интегродифференциальное уравнение вида

$$(c + xr)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 V''(x) + \lambda E[V(x-Z) - V(x)] = \frac{(\mu - r)^2 (V'(x))^2}{2\sigma^2 V''(x)}. \quad (6)$$

В работе [6] была доказана проверочная теорема (для некоторой более общей модели) об оптимальности стратегии (5). Там же утверждалось, что  $A^*(0) = 0$  и  $V(0) = 0$  в силу «флуктуационных свойств броуновского движения». Действительно, в исходный процесс риска входит диффузионная составляющая, таким образом, наличие броуновских флуктуаций будет иметь место при любой инвестиционной стратегии, и разорение при нулевом капитале будет неминуемым. Следовательно, имеет место краевое условие

$$V(0) = 0, \quad (7)$$

и при нулевом капитале любая стратегия  $A(x)$ , в том числе такая, что  $A(0) = 0$ , будет оптимальной. Покажем, однако, что для оптимальной стратегии  $A^*(x)$  соотношение  $\lim_{x \rightarrow 0} A^*(x) = 0$  не имеет места. Для этого заметим сначала, что для решения уравнения (6), удовлетворяющего условиям (4) и (7), выполнено соотношение  $\lim_{x \rightarrow +0} xV'(x) = 0$ . Кроме того, при  $x \rightarrow +0$  предел последнего слагаемого в левой части уравнения (6) также равен нулю, поэтому из (6) следует конечность  $V'(0) = \lim_{x \rightarrow +0} V'(x)$  (в противном случае трудно проверить, что придем в (6) к противоречию). Отсюда, в свою очередь, следует конечность  $V''(0) = \lim_{x \rightarrow +0} V''(x) \neq 0$ . Тогда, переходя в (6) к пределу при  $x \rightarrow +0$ , получим с учетом (7) следующее соотношение:

$$cV'(0) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 V''(0) - \lambda V(0) = \gamma \frac{(V'(0))^2}{V''(0)}, \quad (8)$$

где  $\gamma = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}$ . Поделив теперь соотношение (8) на  $V''(0)$ , с учетом (7) получим, что отношение  $\frac{V'(0)}{V''(0)}$  удовлетворяет квадратному уравнению

$$\gamma \left( \frac{V'(0)}{V''(0)} \right)^2 - c \left( \frac{V'(0)}{V''(0)} \right) - \frac{1}{2}\sigma_r^2 = 0,$$

откуда при условии (4) получаем, что  $\frac{V'(0)}{V''(0)} = \frac{c - \sqrt{c^2 + 2\gamma\sigma_r^2}}{2\gamma}$ . Тогда в соответствии с (5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} A^*(x) \triangleq A^*(0) = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V'(0)}{V''(0)} = \frac{-c + \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_r^2 / \sigma^2}}{\mu - r}, \quad (9)$$

и значение этого выражения положительно при  $\sigma_r > 0$ .

Для того чтобы понять структуру оптимальной стратегии при малых значениях капитала, в следующем разделе обратимся к исследованию асимптотики решения уравнения (6) с начальным условием (7).

## 2. Асимптотика функции Беллмана при малых значениях капитала

Положим  $H(y) = 1 - F(y)$ , тогда уравнение (6) с учетом (7) может быть переписано в виде

$$(c + xr)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 V''(x) - \lambda \int_0^x H(y)V'(x-y)dy = \gamma \frac{(V'(x))^2}{V''(x)}. \quad (10)$$

Пусть также  $v(x) = V'(x) - V'(0)$ ; очевидно, функция  $v(x)$  удовлетворяет уравнению

$$(c + xr)(v(x) + V'(0)) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 v'(x) - \lambda \int_0^x H(y)(v(x-y) + V'(0))dy = \gamma \frac{(v(x) + V'(0))^2}{v'(x)} \quad (11)$$

и краевому условию

$$\lim_{x \rightarrow +0} v(x) = 0. \quad (12)$$

Умножив уравнение (11) на  $v'(x)$ , получим уравнение вида

$$(c + rx)v(x)v'(x) + (c + rx)V'(0)v'(x) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 (v'(x))^2 - \lambda v'(x) \int_0^x H(y)v(x-y)dy - \lambda V'(0)v'(x) \int_0^x H(y)dy = \gamma v^2(x) + 2\gamma V'(0)v(x) + \gamma (V'(0))^2.$$

При малых  $x$  будем искать представление решения уравнения (11) с краевым условием (12) (а также его производной) в виде  $v(x) = k \cdot x^\nu (1 + o(1))$ ,  $x \rightarrow 0$ ,  $v'(x) = \nu k \cdot x^{\nu-1} (1 + o(1))$ ,  $x \rightarrow 0$ , где  $\nu > 0$  и  $k$  - искомые константы. Учитывая, что  $H(x) = 1 + o(1)$ ,  $x \rightarrow 0$ , из (11) при  $x \rightarrow 0$  получим (по главным членам разложения):

$$\left[ ck^2 \nu x^{2\nu-1} + ck\nu V'(0)x^{\nu-1} + \left( r - \frac{\lambda}{\nu+1} \right) k^2 \nu x^{2\nu} + (r - \lambda)k\nu V'(0)x^\nu + \frac{1}{2}\sigma_r^2 k^2 \nu^2 x^{2\nu-2} \right] (1 + o(1)) = \left[ \gamma k^2 x^{2\nu} + 2\gamma k V'(0)x^\nu + \gamma (V'(0))^2 \right] (1 + o(1)).$$

Отсюда получаем, что  $v=1$ , следовательно,  $ckV'(0) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 k^2 = \gamma(V'(0))^2$ , т.е.

$k = -\frac{c + \sqrt{c^2 + 2\gamma\sigma_r^2}}{\sigma_r^2} V'(0)$ . (Выбор данного из двух значений корня квадратного уравнения обусловлен соотношениями (4); напомним, что при этом  $V''(0) = v'(0) = k$ ). Таким образом,

$$V'(x) = V'(0) - \frac{c + \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_r^2 / \sigma^2}}{\sigma_r^2} V'(0) x (1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0 \quad (13)$$

$$V''(x) = -\frac{c + \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_r^2 / \sigma^2}}{\sigma_r^2} V'(0) + o(1), \quad x \rightarrow 0, \quad (14)$$

следовательно, получаем асимптотическое представление для  $V(x)$ :

$$V(x) = V'(0) \left( x - \frac{c + \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_r^2 / \sigma^2}}{2\sigma_r^2} x^2 (1 + o(1)) \right), \quad x \rightarrow 0,$$

при этом значение  $V'(0)$  не определяется методом локального анализа; оно может определяться при решении уравнения (10) на всей положительной полуоси с учетом второго краевого условия:  $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 1$ .

### 3. Случай экспоненциального распределения размера требований

Из соотношения (5) для оптимального количества  $A^*(x)$  и представлений (13) и (14) для производных функции Беллмана получим:

$$A^*(x) = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \left( \frac{\sigma_r^2}{c + \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_r^2 / \sigma^2}} - x (1 + o(1)) \right), \quad x \rightarrow 0, \quad (15)$$

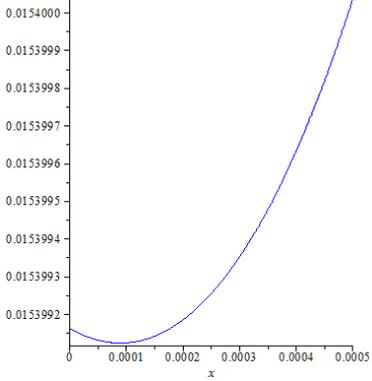
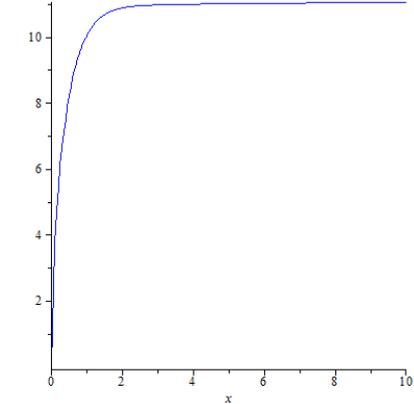
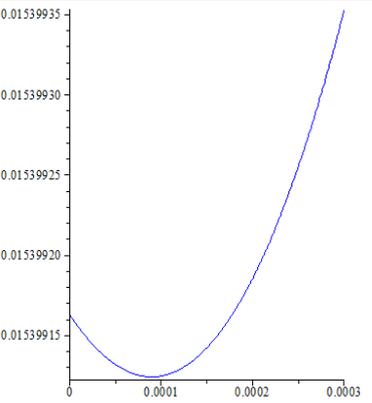
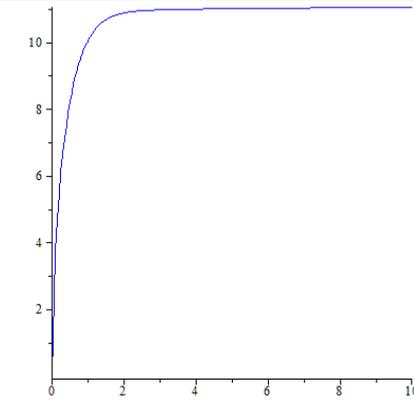
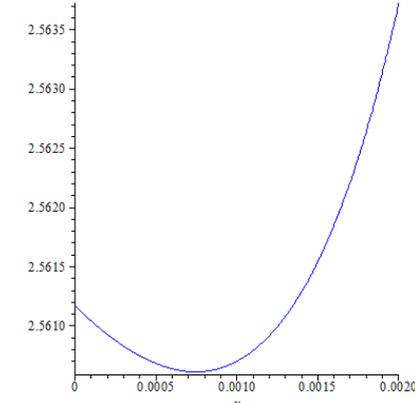
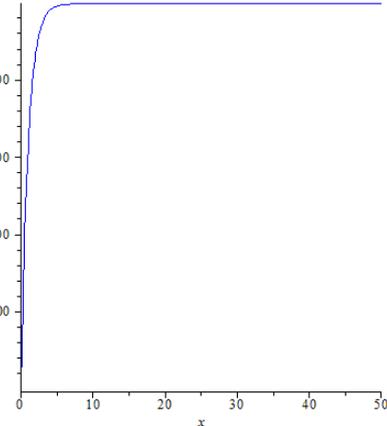
следовательно,

$$A^*(0) = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{\sigma_r^2}{c + \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_r^2 / \sigma^2}}. \quad (16)$$

Нетрудно проверить, что выражения для  $A^*(0)$ , полученные в (9) и (16), совпадают. Из представления (15) видно, что, начинаясь из некоторой положительной константы, вблизи нуля оптимальное количество средств, вкладываемых в акции, должно убывать.

Общий характер поведения оптимальной стратегии (в большом и малом масштабе, при котором видно ее убывание вблизи нуля) можно увидеть на приведенных рисунках, представляющих результаты расчетов в

случае экспоненциального распределения размеров требований при различных значениях параметров модели.

Параметры	График в малом масштабе	График в большом масштабе
$\mu = 0.42$ $r = 0.32$ $\sigma = 0.095$ $m = 1$ $\lambda = 0.3$ $c = 0.36$ $\sigma_r = 0.032$		
$\mu = 1.04$ $r = 0.04$ $\sigma = 0.3$ $m = 1$ $\lambda = 0.04$ $c = 3.6$ $\sigma_r = 0.1$		
$\mu = 0.72$ $r = 0.62$ $\sigma = 0.02$ $m = 1$ $\lambda = 0.3$ $c = 0.36$ $\sigma_r = 0.1$		

Заметим, что расчет оптимальной стратегии может быть проведен как при решении уравнения Беллмана, так и непосредственно при решении уравнения относительно самой оптимальной стратегии. Вывод последнего в случае экспоненциального распределения требований приведем ниже.

Для этого обратимся к уравнению (10). В рассматриваемом случае  $H(y) = e^{-ky}$ , где  $k = 1/m$ . Сделаем замену  $u(x) = V'(x)$  и положим здесь  $v(x) = u(x)e^{kx}$ . Тогда  $u'(x) = e^{-kx}(v'(x) - kv(x))$ , и для  $v(x)$  получаем уравнение

$$(c + xr)v(x) + \frac{1}{2}\sigma_r^2(v'(x) - kv(x)) - \lambda \int_0^x v(y)dy = \gamma \frac{v^2(x)}{(v'(x) - kv(x))}. \quad (17)$$

В то же время

$$A^*(x) = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{V'(x)}{V''(x)} = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{v(x) \cdot e^{-kx}}{(v'(x) - kv(x)) \cdot e^{-kx}} = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{v(x)}{v'(x) - kv(x)},$$

тогда уравнение (17) можно переписать в виде

$$(c + xr)v(x) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 v(x) \cdot \left( -\frac{\mu - r}{A^*(x) \cdot \sigma^2} \right) - \lambda \int_0^x v(y)dy = \gamma v(x) \left( -\frac{A^*(x) \cdot \sigma^2}{\mu - r} \right).$$

Продифференцировав по  $x$  это уравнение, получим

$$\begin{aligned} rv(x) + (c + xr)v'(x) - \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{v'(x)A^*(x) - v(x)A^{*'}(x)}{A^{*2}(x)} - \lambda v(x) &= \\ = -\frac{\mu - r}{2} [v'(x)A^*(x) + v(x)A^{*'}(x)], \end{aligned}$$

а затем, поделив все на  $v(x)$ , приходим к уравнению относительно  $A^*(x)$ :

$$\begin{aligned} r - \lambda + (c + xr) \left( k - \frac{\mu - r}{\sigma^2 \cdot A^*(x)} \right) - \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{kA^*(x) - \frac{\mu - r}{\sigma^2} - A^{*'}(x)}{A^{*2}(x)} &= \\ = -\frac{\mu - r}{2} \left[ kA^*(x) - \frac{\mu - r}{\sigma^2} + A^{*'}(x) \right], \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$\begin{aligned} k\sigma^2 A^{*3}(x) + 2 \left( r - \lambda + ck - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} + kr \cdot x \right) \frac{\sigma^2}{\mu - r} A^{*2}(x) - 2 \left( c + xr + \frac{1}{2}\sigma_r^2 k \right) A^*(x) + \sigma_r^2 \frac{\mu - r}{\sigma^2} &= \\ = [-\sigma^2 A^{*2}(x) - \sigma_r^2] A^{*'}(x). \end{aligned}$$

Полученное уравнение в совокупности с начальным условием (16) было использовано в расчетах, результаты которых были приведены на графиках.

Заметим также, что из последнего уравнения, в частности видно, что решение с условием  $A^*(0) = 0$ , объявленным в [6], имеет в нуле отрицательную производную, и, следовательно, уходит в область отрицательных значений, что противоречит выводам модели относительно оптимальной стратегии.

## Литература

1. Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Куркина А.О. Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: I. Инвестиционные стратегии и вероятность разорения. – Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009, т. 16, вып. 6, с. 961-981.
2. Azcue P., Muler M. Optimal investment strategy to minimize the ruin probability of an insurance company under borrowing constraints. - Insurance: Mathematics and Economics, 2009, v. 44 (1), p. 26-34.
3. Belkina T., Hipp C., Luo Sh., Taksar M. Optimal constrained investment in the Cramer-Lundberg model. – Scandinavian Actuarial Journal (accepted; arXiv:1112.4007v1 [q-fin.PM], 2011, Cornell University Library).
4. Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Куркина А.О. Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: II. Модель Крамера-Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований. – Обозрение прикладной и промышленной математики, 2010, т. 17, вып. 1, с. 3-24.
5. Hipp C., Plum M. Optimal investment for insurers. - Insurance: Mathematics and Economics, 2000, v. 27 (2), p. 215-228.
6. Yang H., Zhang L. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process. - Insurance: Mathematics and Economics, 2005, v.37, p. 615-634.
7. Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin. – Mathematics of Operations Research, 1995, v. 20, p. 937-958.

### Некоторые методы ранжирования объектов по результатам их парных сравнений

Методы парных сравнений занимают сегодня важное место в факторном анализе систем различной природы, в том числе социально-экономических, политических и др. Они находят применение в широком спектре задач выбора, выявления предпочтений, диагностики изменений в структуре анализируемой совокупности объектов или структуре состояний изучаемого объекта во времени и т.п. Проблеме упорядочения в группе объектов посвящена обширная литература, мы упомянем здесь наиболее близкие нам работы Т.Саати [1] и Б.Г.Миркина [2].

Наряду с термином "ранжирование" (т.е. упорядочение по рангам), мы пользуемся также его синонимом "расстановка" (по местам). В основе нашего подхода к построению расстановки лежит присвоение (исходя из результатов парных сравнений) каждому объекту *веса*, так что расстановка объектов строится по убыванию их весов. Таким образом, задача построения расстановки сводится к расчету весов объектов. Настоящая статья посвящена методам такого расчета на основе *принципа самосогласованности*<sup>1</sup>.

#### 1. ИСХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Исходной информацией в нашем подходе является количество объектов  $N$  и матрица  $A(N \times N)$  результатов их парных сравнений. Элементы  $a_{ij}$ ,  $a_{ji}$  отражают результат сравнения  $i$ -го и  $j$ -го объекта. Сравнение объектов может проводиться в качественной (*булевой*) либо в количественной форме.

---

<sup>1</sup>Предложенного Гребенниковым в докладе "К построению расстановок на основе парных сравнений" на семинаре ЦЭМИ РАН "Неизвестная экономика" в июне 2012 г.

При качественном сравнении принимается  $a_{ii} = 0$ ,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i \text{ превосходит } j \\ 0 & \text{если } i \text{ эквивалентен (равносилен) } j \\ -1 & \text{если } j \text{ превосходит } i \end{cases} \quad i \neq j ; \quad (1)$$

матрица сравнений при этом антисимметрична. Отношение превосходства может быть задано непосредственно (например, экспертом) или синтезировано на основе ряда характеристических признаков (свойств). Подчеркнем, что указанное отношение не предполагается транзитивным, что является важным преимуществом парных сравнений.

Количественную форму сравнения удобнее всего описать на языке спортивных соревнований, считая, что элемент  $a_{ij}$  матрицы результатов показывает количество "голов" (в широком смысле), забитых участником (объектом)  $i$  во встрече с участником  $j$ . Например, в футболе это число голов (в узком смысле), в баскетболе – число попаданий в корзину соперника, в фехтовании – число нанесенных уколов и т.п. Вообще говоря результирующие числа могут быть и нецелыми, выражающими, например, среднюю силу ударов, наносимых боксерами друг другу. В дальнейшем мы будем называть такую форму сравнения *голевой*.

Рассмотрим, как на основе одной и той же исходной информации можно применять описанные способы представления результатов парных сравнений.

*Пример.* Пусть объекты суть различные конкурирующие проекты, каждый из которых решает тем или иным способом поставленную заказчиком задачу. Проекты сопоставляются по наличию или отсутствию определенных **позитивных** свойств. По каждому проекту заказчик (или уполномоченный им эксперт) ставит "плюс" тем свойствам, которыми данный проект обладает, и ставит "минус" отсутствующим свойствам. Если  $N$  – число проектов, а  $m$  – количество свойств, то результат экспертизы представляется  $P(N \times m)$  матрицей, каждая строка-проект которой состоит из плюсов и минусов.

Преобразование прямоугольной **описательной** матрицы  $P$  в квадратную матрицу  $A(N \times N)$  **парных сравнений** проектов может быть выполнено как булевым, так и голевым способом. При булевом подходе  $a_{ij} = 1$ , если в строке  $i$  матрицы  $P$  больше плюсов, чем в строке  $j$  в

противном случае  $a_{ij} = -1$ ; при равенстве числа плюсов  $a_{i,j} = 0$ . При голевом подходе  $a_{ij}$  равно числу свойств, которыми проект  $i$  обладает, а проект  $j$  не обладает (забитые голы в обобщенном смысле). ■

Использовать ли при постановке задачи качественную или количественную матрицу парных сравнений  $A$ , зависит от содержательного смысла задачи. Но в любом случае конечным результатом анализа является упорядочение всей группы объектов – **расстановка (ранжирование) объектов в порядке убывания их "силы"**, понимаемой в широком смысле.

С точки зрения изложения предлагаемых в статье методов ранжирования, наиболее удобной моделью является интерпретация матрицы  $A$  в голевом смысле (даже если она булева), причем эта матрица предполагается **неотрицательной**. Элементы фиксированной строки  $i$  показывают количества голов, **забитых** игроком  $i$  всем остальным игрокам; полагаем  $a_{ii} = 0$ . Тогда элементы фиксированного столбца  $j$  суть количества голов **пропущенных** участником  $j$  во встречах со всеми остальными участниками.

Если отражать результат качественного сравнения в форме (1), то матрица  $A$  не удовлетворяет наложенному нами условию неотрицательности. Чтобы устранить этот недостаток, примем, вместо (1),

$$\begin{array}{ll} a) & (a_{ij} = 1, a_{ji} = 0) \quad \text{если } i \text{ лучше, чем } j \\ b) & (a_{ij} = a_{ji} = 1) \quad \text{если } i \text{ и } j \text{ эквивалентны} \end{array} \quad ; \quad (2)$$

тогда матрица  $A$  неотрицательна, и значение элемента  $a_{ij}$  интерпретируется как число голов в  $(i, j)$ -встрече.

## 2. ВЕСА УЧАСТНИКОВ В ОСНОВНОМ <sup>2</sup> ВАРИАНТЕ

2.1. *Определение весов.* Как можно было бы характеризовать силу участников футбольного турнира с помощью весовых коэффициентов, составляющих в совокупности неотрицательный вектор

---

<sup>2</sup>Описываемый в данном разделе вариант определения весов назван "основным" не потому, что он наилучший (ниже выяснится, что это не так), а потому, что он был найден нами хронологически первым (раньше других, которые мы считаем его модификациями, см. ниже раздел 3). Именно в этом варианте был сформулирован принцип самосогласованности, который здесь выступает в наиболее логичной форме, и который был заложен затем во все последующие модификации.

$x = (x_1, \dots, x_N)$  ? Наиболее простой способ – это взять отношение сумм забитых и пропущенных голов, т.е. по формуле

$$x_i := \frac{\sum_{j \neq i}^N a_{ij}}{\sum_{j \neq i}^N a_{ji}} \quad i = 1, \dots, N \quad . \quad (3)$$

Такой подход исходит из неявного предположения, что априори все участники равносильны: этим объясняется прямое суммирование в (3). Однако апостериори, по результатам турнира, это предположение, вообще говоря, не подтверждается; соответственно, формула (3) внутренне противоречива и нуждается в корректировке. Логично наделить всех участников весами  $(x_i)$  так, чтобы скорректированное с их помощью выражение в правой части (3) давало, при всех  $i$ , то же значение, что и слева – *принцип самосогласованности*.

Естественный принцип корректировки правой части (3) таков: гол, забитый участнику  $j$ , засчитывать с весом  $x_j$ , а гол, пропущенный от участника  $j$ , засчитывать с обратным весом  $1/x_j$ . При таком подходе правая часть (3) заменится выражением

$$\frac{\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j}{\sum_{j \neq i} (a_{ji}/x_j)} =: f_i(x) \quad i = 1, \dots, N \quad , \quad (4)$$

и условие самосогласованности выражается векторным нелинейным уравнением

$$x = f(x) \quad f = (f_1, \dots, f_N) \quad , \quad x \in R_+^N \quad . \quad (5)$$

Таким образом, искомые апостериорные веса участников турнира (назовем их *абсолютными*) образуют вектор, являющийся решением уравнения (5).

*Примечание.* С математической точки зрения уравнение (5) требует специального анализа относительно существования и единственности решения, а также вычислительного метода его нахождения. Здесь мы этих вопросов не касаемся, ограничившись приводимым ниже методом

решения, показавшим в *регулярном* случае (т.е. за исключением **особых ситуаций** см. ниже п. 2.3) свою эффективность в экспериментальных расчетах. ■

Поскольку веса используются нами как инструмент ранжирования участников, в этом качестве вектор весов  $x = (x_i)$ , может определяться с точностью до произвольного нормирующего множителя. Удобно нормировать веса, введя вектор  $y := x/v$ , подобрав знаменатель  $v$  (скаляр) так, чтобы *среднее значение*

$$\bar{y} := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N y_i \quad (6)$$

равнялось единице (черта сверху будет использоваться и далее для обозначения среднего, в смысле (6), значения компонент того или иного вектора в  $R_+^N$ ); определенные таким способом веса  $(y_i)$  назовем *нормированными*.

2.2. *Метод решения.* Подставляя в (5)  $x = vy$ , получим уравнение относительно нормированного вектора  $y$  и скаляра  $v$

$$vy = f(vy) = v^2 f(y) \iff y = v f(y) \quad (7)$$

(использовано то обстоятельство, что выражение (5) однородно второй степени по  $x$ ). Условие нормировки  $\bar{y} = 1$  позволяет выразить скаляр  $v$  непосредственно через  $y$ :

$$1 = \bar{y} = v \bar{f}(y) \implies v = \frac{1}{\bar{f}(y)} \quad , \quad (8)$$

и, таким образом, уравнение (5) приобретает вид

$$y = F(y) := f(y)/\bar{f}(y) \quad , \quad (9)$$

где вектор  $f(x)$  определен в (4).

Экспериментальные расчеты на компьютере (по программе в языке TURBOPASCAL) показывают, что уравнение (9) в регулярном случае эффективно решается методом прямых итераций:

$$y^0 := (1, \dots, 1) \quad y^k := F(y^{k-1}) \quad k = 1, 2, \dots \quad . \quad (10)$$

После того, как нормированный вектор  $y$  найден, можно (если это требуется) вычислить абсолютные веса (см (8)):

$$x = vy = y/\bar{f}(y) \quad . \quad (11)$$

2.3. *Анализ возможных особых ситуаций.* В этом пункте мы рассмотрим особые ситуации, в которых описанный в п. 1.2 метод неприменим.

2.3.1. Вырожденные ситуации – дифференциация весов. В формуле (4) возможно вырождение, не позволяющее ею пользоваться, по двум причинам.

1) Среди участников могут оказаться такие (назовем их "голышами"), которые на забили ни одного гола. Соответствующая **строка** в матрице  $A$  будет нулевой, поэтому для любого голыша числитель в (4) обращается в ноль, и веса голышей надо было бы считать равными нулю; но тогда знаменатель (4) теряет смысл (там будет деление на ноль).

2) Противоположная ситуация – когда среди участников есть такие (назовем их "титанами"), которые не пропустили ни одного гола (нулевой **столбец** в матрице  $A$ ). Для любого титана знаменатель в (4) обращается в ноль, и формула (4) опять неприменима (вес титана оказывается равным бесконечности).

Мы опишем общий вырожденный случай, когда могут присутствовать одновременно и голыши и титаны. В этом общем случае придется дифференцировать участников, разбив их на "классы". Высший класс  $U$  (up) – титаны, низший класс  $D$  (down) – голыши; остальные участники образуют средний *базовый* класс  $B$ . В соответствии с этим разбиением выделим в матрице  $A$  три подматрицы:

$$\begin{aligned} BB &:= \{a_{ij} \mid i \in B, j \in B\} \\ UB &:= \{a_{ij} \mid i \in U, j \in B\} \quad . \\ UD &:= \{a_{ij} \mid i \in U, j \in D\} \end{aligned}$$

Дальнейшее рассмотрение проведем при следующих предположениях

*Предположение 1.* Матрица  $BB$  регулярна. ■

В силу этого, рассматривая матрицу  $BB$  как результирующую для турнира с базовыми участниками, и применяя к ней описанный метод,

мы получим апостериорные абсолютные веса этих участников  $x^B := (x_i, i \in B)$ ; нормируя эти веса как и в (6), получим вектор  $y^B$  весов базовых участников.

*Предположение 2.* Каждая строка матрицы  $UB$  содержит ненулевой элемент. ■

Это предположение позволяет определить веса титанов по взвешенной сумме голов, забитых ими базовым участникам:

$$x_i^U := \sum_{j \in B} a_{ij} x_j \quad i \in U \quad ; \quad (12)$$

нормируя эти веса получим вектор  $y^U$  весов титанов.

*Предположение 3.* Каждый столбец матрицы  $UD$  содержит ненулевой элемент. ■

Естественно тогда определить веса голышей обратно пропорционально взвешенной сумме голов, пропущенных ими от титанов, т.е. формулой

$$x_i^D := \left\{ \sum_{j \in U} a_{ji} / x_j^U \right\}^{-1} \quad i \in D \quad ; \quad (13)$$

нормируя эти веса получим вектор  $y^D$  весов голышей.

Таким образом, возникает иерархия трех уровней. В случае, когда какое-либо из Предположений 1-3 не выполняется, придется строить еще более глубокую иерархию весов. Идея иерархии ясна из изложенного здесь подхода к дифференциации; более глубокая иерархия строится аналогично, мы это опускаем.

2.3.2. Связность матрицы  $A$ . Результирующая матрица  $A$  называется *связной*<sup>3</sup>, если не существует разбиения всего состава участников  $S$  на две непересекающиеся группы  $S_1, S_2$  ( $S_1 \cup S_2 = S$ ) такие, что никто из участников одной из групп не забил ни одного гола участникам другой группы; формально:

$$a_{ij} = 0, \quad a_{ji} = 0 \quad \forall (i \in S_1, j \in S_2) \quad . \quad (14)$$

В противном случае матрица  $A$  несвязна (приводима). Содержательно это соответствует тому, что участники общего турнира разбились на две

---

<sup>3</sup>В другой терминологии – *неприводимой*.

независимые группы: веса участников каждой из групп никак не влияют на веса другой группы. Соответственно, веса каждой из групп нужно определять отдельно, рассматривая большой турнир как два независимых малых турнира, и применяя к каждому из них описанный выше метод.

*Замечание.* Вычислительные эксперименты показывают, что если применить метод прямых итераций по формуле (10) к несвязной матрице, то он может не сходиться. Но, если несколько демпфировать этот метод, записав уравнение (9) в виде

$$y = (1 - \lambda)F(y) + \lambda y =: \tilde{F}(y) \quad , \quad (15)$$

где  $\lambda \in (0, 1)$  – параметр, выбираемый произвольно, то при подходящем значении  $\lambda$  итеративный процесс (10) с заменой  $F$  на  $\tilde{F}$  сходится, но при этом он дает ненулевые веса участникам только одной из групп (с наибольшим разбросом результатов), а веса другой группы оказываются нулевыми. ■

### 3. НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ ОСНОВНОГО ВАРИАНТА

Можно предложить много модификаций описанного выше подхода к определению весов на основе парных сравнений, которые (модификации) сохраняют основную идею самосогласованности, выраженную уравнением (5). В этом разделе мы приведем несколько вариантов, в которых метод решения прошел экспериментальную проверку.

3.1. *Первый вариант модификации.* Идея этой модификации состоит в том, что гол, забитый участником  $j$  во встрече с участником  $i$  засчитывается не с абсолютным весом  $x_j$ , а с относительным весом  $x_j/x_i$ . Уравнение самосогласованности (5) сохраняется, но его правая часть теперь (вместо (4)) такова

$$f_i^{(1)}(x) := \frac{\sum_{j \neq i} a_{ij}(x_j/x_i)}{\sum_{j \neq i} a_{ji}(x_i/x_j)} \quad i = 1, \dots, N \quad , \quad (16)$$

Учитывая, что в процессе суммирования в (16) величина  $x_i$  остается постоянной, можно записать функции  $f_i^{(1)}$  в виде

$$f_i^{(1)}(x) := \frac{1}{x_i^2} \cdot \frac{\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j}{\sum_{j \neq i} (a_{ji}/x_j)} = \frac{1}{x_i^2} \cdot f_i(x) \quad i = 1, \dots, N \quad , \quad (17)$$

где функции  $f_i$  определены в (4). Умножая (17) на  $x_i^2$ , мы снова приходим к уравнению вида (5)

$$x = f^{1/3}(x) =: \tilde{f}(x)$$

(возведение вектора в степень понимается в покомпонентном смысле).

Функция  $\tilde{f}$  однородна степени 2/3, поэтому переходя, как и в (7), к нормированным весам  $y$ , получаем уравнение

$$vy = \tilde{f}(vy) = v^{2/3} \tilde{f}(y) \quad \iff \quad y = v^{-1/3} \tilde{f}(y) \quad .$$

Условие нормировки дает

$$y = \frac{1}{\tilde{f}(y)} \cdot \tilde{f}(y) =: F^{(1)}(y) \quad , \quad v = \overline{(\tilde{f}(y))^3} \quad , \quad (18)$$

где, как и ранее черта сверху означает среднее значение в смысле (6). Как и в п. 2.2, к уравнению (18) применим метод прямых итераций (10) с функцией  $F^{(1)}$ . В процессе (11) нормирующий скаляр находится, согласно (18), по формуле  $v = \bar{z}^3$ .

**3.2. Второй вариант модификации.** Вторая идея, дополняющая первую, состоит в том, что вместо отношений сумм, как в (1) берется их разность; тогда имеем

$$f_i^{(2)}(x) := \sum_{j \neq i} a_{ij}(x_j/x_i) - \sum_{j \neq i} a_{ji}(x_i/x_j) \quad i = 1, \dots, N \quad ,$$

что можно записать в виде

$$f_i^{(2)}(x) := \frac{1}{x_i} \cdot \sum_{j \neq i} a_{ij}(x_j/x_i) - x_i \cdot \sum_{j \neq i} a_{ji}(x_i/x_j) \quad i = 1, \dots, N \quad . \quad (19)$$

Уравнение самосогласованности (5) покомпонентно можно записать в виде

$$x_i^2(1 + \sum_{j \neq i} a_{ji}/x_j) = \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j \iff x_i = \left( \frac{\sum_{j \neq i} a_{ij}x_j}{1 + \sum_{j \neq i} a_{ji}/x_j} \right)^{1/2} . \quad (20)$$

Поскольку функции (19) однородны (нулевой степени), решение можно искать в нормированной форме; подставляя в (20)  $x = vy$ , получаем

$$y_i = \left( \frac{\sum_{j \neq i} a_{ij}y_j}{v + \sum_{j \neq i} (a_{ji}/y_j)} \right)^{1/2} =: g_i(y, v) . \quad (21)$$

Неизвестными здесь являются вектор  $y$  и скаляр  $v$ , связанные условием нормировки  $\bar{g}(y, v) = 1$ ; применяем опять метод прямых итераций типа(11)

$$y^0 := (1, \dots, 1) \quad , \quad v^0 := 1 \\ z^k := g(y^{k-1}, v^{k-1}) \quad , \quad v^k := \bar{z}^k \quad , \quad y^k := z^k/v \quad k = 1, 2, \dots . \quad (22)$$

3.3. *Третий вариант модификации.* Этот вариант можно считать "гибридом" абсолютного и относительного, но относительное надо понимать не в смысле дроби  $x_j/x_i$  (как в пп. 3.1,3.2), а в смысле разности  $x_j - x_i$ . Отталкиваясь от функции  $f_i^{(2)}$  (п. 3.2), примем

$$f_i^{(3)}(x) := \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j - \sum_{j \neq i} a_{ji}(x_i - x_j) \quad i = 1, \dots, N$$

(забитый гол считается с абсолютным весом, а пропущенный – с относительным), что можно записать в виде

$$f_i^{(3)}(x) := \sum_{j \neq i} (a_{ij} + a_{ji})x_j - x_i \cdot \sum_{j \neq i} a_{ji} \quad i = 1, \dots, N . \quad (23)$$

Вторая сумма в (23) не зависит от искомых весов, это – известная величина, обозначим ее  $c_i$ ; тогда уравнение самосогласованности (5) (в покомпонентной форме) можно записать в виде

$$x_i(1 + c_i) = \sum_{j \neq i} (a_{ij} + a_{ji})x_j \quad c_i := \sum_{j \neq i} a_{ji} \quad i = 1, \dots, N \quad ,$$

или

$$x_i = \sum_{j \neq i} s_{ij} x_j \quad s_{ij} := \frac{a_{ij} + a_{ji}}{1 + c_i} \quad i = 1, \dots, N \quad . \quad (24)$$

Это – система линейных уравнений, которая в векторной форме записывается в виде  $x = Sx$ , где квадратная матрица  $S(N \times N)$  состоит из элементов  $s_{ij}$ . Т.к. система (24) однородна, то она имеет в общем случае (когда матрица  $S$  невырождена – ее определитель отличен от нуля) только тривиальное решение  $x_i = 0$  при всех  $i$ . Чтобы получить нетривиальное нормированное решение  $y$  надо заменить условие равенства (5) на условие пропорциональности, т.е. вместо уравнения  $x = Sx$  принять уравнение

$$x = \lambda Sx \quad \iff \quad Sx = vx \quad v := 1/\lambda \quad , \quad (25)$$

в котором наряду с вектором  $x$  искомым является и коэффициент пропорциональности – скаляр  $\lambda$ .

Мы получили стандартную задачу линейной алгебра на нахождение собственного вектора  $x$  и собственного числа  $v$  данной матрицы  $S$ ; при этом, собственный вектор определяется с точностью до произвольного множителя, и считая его нормированным, обозначим через  $y$ . Поскольку матрица  $S$  неотрицательна, в силу теоремы Фробениуса-Перрона она всегда (в случае невырожденности) имеет положительное собственное число  $v$  (называемое *спектральным радиусом* матрицы  $S$  и отвечающий ему нормированный собственный вектор  $y \in R_+^N$ . Решение единственно и находится итеративным процессом типа (11) (который всегда сходится)

$$y^0 := (1, \dots, 1) \quad ; \quad z^k := Sy^{k-1} \quad , \quad y^k := z^k / \bar{z}^k \quad k = 1, 2, \dots \quad , \quad (26)$$

причем  $\lambda = 1/v$  ,  $v := \lim \bar{z}^k$ .

**3.4. Четвертый вариант модификации.** Этот вариант исходит из принципа: вес участника пропорционален взвешенному числу забитых им голов. Этому принципу отвечает уравнение  $y = \lambda Ay$  где  $A$  – исходная матрица результатов,  $y$  – нормированный вектор рейтингов, а  $\lambda$  – коэффициент пропорциональности. Это уравнение точно такое же, как уравнение (25) с заменой матрицы  $S$  на матрицу  $A$ . Решается оно так же, как и в предыдущем случае.

Таблица 1

## Результаты экспериментальных расчетов

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	4	2	1	3	2
2	5	0	0	5	2	1	5	1
3	0	1	0	2	3	1	3	5
4	2	5	1	0	5	3	0	3
5	1	2	3	1	0	5	0	2
6	0	1	4	2	2	0	3	1
7	3	2	4	1	0	4	0	1
8	5	0	2	3	2	2	3	0
0. вес	0.922	1.484	0.934	1.137	0.874	0.742	0.862	1.025
$m$	5	1	4	2	7	8	6	3
1. вес	0.948	1.150	1.010	1.028	0.958	0.913	0.962	1.029
$m$	7	1	4	3	6	8	5	2
2. вес	0.931	1.219	1.004	1.051	0.939	0.874	0.946	1.036
$m$	7	1	4	2	6	8	5	3
3. вес	0.754	1.386	1.175	1.231	0.972	0.716	0.769	0.998
$m$	7	1	3	2	5	8	6	4
4. вес	0.875	1.211	0.978	1.215	0.886	0.848	0.940	1.046
$m$	7	2	4	1	6	8	5	3

#### 4. АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ, ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По всем описанным вариантам были проведены экспериментальные расчеты. Исходная матрица  $A$  генерировалась либо случайным образом, либо на основе какой-либо замысловатой формулы, дающей достаточно разнообразный спектр значений.

Приведенный в Таблице 1 пример для  $N = 8$  иллюстрирует типичную картину результатов. Исходная матрица генерировалась формулой

$$a_{ij} = TRUNC [2 |\sin(ij)| \cdot (2 + \cos(i - 2j))] \quad ,$$

в которой функция TRUNC (в языке PASCAL) вычисляет целую часть аргумента; очевидно, элементы  $a_{ij}$  – целые числа в интервале  $[0,5]$ .

Вверху таблицы показана матрица  $A$ , а затем идут результаты расчета по основному варианту (его номер "0"), и четырем вариантам модификаций; показаны нормированные веса участников (вектор  $y$ ) и соответствующее ранжирование (с номером ранга  $m$ ) в порядке убывания веса. Дополним эти данные числом итераций  $k$  в процессе типа (11) с критерием останова

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^N |y_j^k - y_j^{k-1}| < \varepsilon$$

при  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

вариант		0	1	2	3	4
$k =$		423	10	15	10	14

4.1 *Сопоставительный анализ.* Для сопоставления вариантов построим следующие две симметричные С-таблицы ( $C$  – comparison, сравнение), в каждой из которых строки и столбцы отвечают различным вариантам 0 – 4 Таблицы 1.

В Таблице 2 элемент  $c_{kl}$  показывает суммарное отклонение в ранжировании участников при сравнении данной пары вариантов, именно

$$c_{kl} := \sum_{j=1}^N |m_j^k - m_j^l| \quad ;$$

в дополнительном столбце в строке  $k$  показано среднее отклонение

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{l \neq k} c_{kl} \quad .$$

В Таблице 3 этот же элемент показывает расхождение (количество несовпадающих позиций) между вариантами  $(k, l)$ .

Таблица 2

*Суммарные отклонения между вариантами ранжирования*

$k \setminus l$	0	1	2	3	4	среднее
0	—	6	4	6	6	5.50
1	6	—	2	5	4	4.25
2	4	2	—	4	2	3.00
3	6	5	4	—	6	5.25
4	6	4	2	5	—	4.50

Таблица 3

*Количество расхождений между вариантами*

$k \setminus l$	0	1	2	3	4	среднее
0	—	4	3	4	5	4.00
1	4	—	2	4	2	3.25
2	3	2	—	4	2	2.75
3	4	5	4	—	6	4.75
4	5	3	2	5	—	4.00

#### 4.2. Обсуждение. Обсудим результаты.

1) Как видим разные варианты моделей дают разные результаты, причем, как показывают таблицы 2,3, различия существенны. Наиболее "сбалансированным" оказался вариант 2 – его отличие от других вариантов наименьшее, но это не означает, что его надо использовать во всех случаях. Думается, выбор того или иного варианта построения весов, должен диктоваться смыслом исследуемой проблемы.

2) При заданной точности, число требуемых итераций  $k$  во всех вариантах практически одинаково. Исключение составляет вариант -0, где оно на порядок больше ( $k = 423 \gg 15$ ); не ясно, почему это так.

3) В общем виде предложенная нами схема описывается так. Подсчитываются взвешенные суммы числа забитых  $S_1$  и пропущенных  $S_2$  голов, они имеют вид

$$S_1 = \sum_j a_{ij} \varphi_1(x_i, x_j) \quad , \quad S_2 = \sum_j a_{ji} \varphi_2(x_i, x_j) \quad ,$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  – взвешивающие функции, зависящие от весов участников. Содержательный смысл требует, чтобы функция  $\varphi_1$  возрастала по второму аргументу (кому забивают) и не возрастала по первому (кто забивает), а функция  $\varphi_2$  – наоборот. В условии самосогласованности (5) берется либо отношение, либо разность этих двух сумм.

Представляется, что такая схема плодотворна и допускает многие модификации взвешивающих функций. Кроме приведенных пяти вариантов нами были испробованы и некоторые другие; те варианты, для которых мы не смогли дать простой итеративный метод решения вида (10), остались вне рамок статьи.

## *Литература*

1. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991.
2. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.

**Что мешает употреблению в языке теории вероятностей термина "условное событие" ?**

ПРЕАМБУЛА

Данная заметка, полемическая по своему характеру, связана с ситуацией, возникшей при попытке опубликовать нашу статью "Фидуциальный подход в инвариантной проблеме наилучшего выбора" в журнале *Теория вероятностей и ее применения* (ТВП). Статья была направлена в редакцию журнала в 2007 году, и после трехлетней переписки, касающейся, в основном, использованных нами в этой статье терминов "условное событие" и "условная случайная величина", она была отвергнута редакцией: рецензент так и не смог преодолеть языковой барьер – воспринять эти "неортодоксальные" термины (хотя в специальном приложении мы дали подробные разъяснения по ним), и до обсуждения содержания статьи дело так и не дошло. Мы, конечно, могли бы отказаться от использованных терминов, но изложить предложенный в статье подход в общепринятых терминах ("условные вероятности") гораздо труднее; сам принцип, положенный нами в основание фидуциальной теории – "случайные величины, свободные априорно, должны оставаться таковыми же и апостериорно" – не может быть сформулирован так емко и лаконично в обычной терминологии.

Позднее мы все же опубликовали статью в журнале *Экономика и математические методы* [1,2], но не считаем, что ситуация разрешилась. Мы рассматриваем этот инцидент как сигнал о неблагоприятном положении в языке теории вероятностей. Указанные термины вполне строгие, и введены они не нами <sup>1</sup>(как было сказано в отзыве ТВП), но они

---

<sup>1</sup>Например, Г.П.Климов в учебнике [4] прямо использует термин "условное вероятностное пространство", см. ниже сноску 3.

не принимаются в ортодоксальном языке, а используются, в основном, в работах прикладного характера. Целями настоящей заметки является открыть научную дискуссию по этому вопросу, чтобы снять с этих терминов "еретический ярлык" и, в конце концов, легализовать их употребление в "каноническом" языке теории вероятностей, внося соответствующие поправки в учебную литературу. Сложившееся положение препятствует нормальному общению в научной среде и, если его не исправить, будет тормозом в развитии самой науки.

\*\*\*\*\*

Основные понятия теории вероятностей заложены классической аксиоматикой А.Н.Колмогорова, построенной им в работе [3]. Вероятностное пространство определяется тройкой

$$\Pi = \{\Omega, \sigma, \mathbf{P}\} \quad , \quad (1)$$

где  $\Omega$  – пространство (множество) элементарных исходов  $\omega$ ,  $\sigma$  – сигма-алгебра подмножеств  $\Omega$ ,  $\mathbf{P}$  – вероятностная мера на  $\sigma$ . Каждое подмножество  $A \in \sigma$  интерпретируется как событие, а  $P(A)$  – как вероятность его реализации. Наиболее трудным в этой аксиоматике является определение условной вероятности; именно о нем идет речь в данной заметке.

1. О понятии "событие". В профессиональном жаргоне специалистов-вероятностников термины "множество в  $\sigma$ -алгебре" и "событие" стали синонимами. Однако это допустимо, если рассмотрению подлежит только **одно фиксированное** вероятностное пространство  $\Pi$ . Если же мы имеем дело с двумя разными пространствами  $\Pi_1, \Pi_2$ ,  $\sigma$ -алгебры которых  $\sigma_1, \sigma_2$  имеют непустое пересечение  $\sigma := \sigma_1 \cap \sigma_2$ , то всякое множество в  $\sigma$  порождает два **различных** события, в зависимости от того, в каком пространстве они рассматриваются.

Таким образом, термины *множество* и *событие* различны. **Множество становится событием только после того как оно погружено в определенное вероятностное пространство.**

2. *Условное вероятностное пространство относительно базового события ненулевой вероятности.* Прежде всего, отметим, что понятие "вероятность" неотделимо от понятия "событие"; осмысленное звучание имеет только *вероятность события*. Поэтому **говорить о вероятности можно только если определено событие, которому она приписывается.**

Общепринятый термин "условная вероятность" имеет очень давние истоки, основную роль он играет в формулах Бейеса; напомним, как это понятие обычно излагается. Пусть в пространстве (1) выделено некоторое *базовое* событие  $B \in \sigma$  с **ненулевой** вероятностью  $P(B) > 0$ ; тогда для любого  $A \in \sigma$  вероятность события  $A$  при условии, что реализовалось событие  $B$  (*условная вероятность*  $P(A|B)$ ), определяется формулой

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)} \quad , \quad (2)$$

где событие  $AB \in \sigma$  означает одновременное наступление событий  $A$  и  $B$  (множество  $AB$  есть пересечение множеств  $A, B$ ).

Выше подчеркнуто, что термин "условная вероятность" (как и всякая вероятность) имеет смысл только если определено событие, которому эта вероятность приписывается. В приведенном же изложении событие, которому приписывается вероятность (2), **не определено в явной форме**. Молчаливо подразумевается, что это определение содержится в самой формулировке "событие  $A$  при условии, что реализовалось событие  $B$ "; но аксиоматика (1) не содержит такого понятия, поэтому **приведенное традиционное изложение формально неполно**.

*Некоторые ссылки.* Этот изъян чувствуется во многих учебниках по теории вероятностей, написанных авторитетными учеными. Так, Б.В.Гнеденко в учебнике [5] счел нужным заметить (стр. 57), что вероятности (2) обладают всеми свойствами вероятности в смысле определения (1), если рассматривать их в **вероятностном пространстве**

$$\Pi_B := \{B, \sigma_B, \mathbf{P}_B\} \quad ; \quad (3)$$

здесь пространством элементарных событий служит множество  $B \subseteq \Omega$ , сигма-алгебра  $\sigma_B$  индуцируется естественным образом исходной

$\sigma$ -алгеброй ( $\sigma_B := \{A \cup B \mid A \in \sigma\}$ ), а вероятностная мера определяется формулой (2).<sup>2</sup> Замечание Гнеденко расшифровывает недосказанность, имеющуюся в традиционном изложении; эта расшифровка естественна и вполне очевидна, поэтому Гнеденко ограничился лишь этим кратким замечанием, а в научных публикациях приведенная расшифровка подразумевается как сама собой разумеющаяся и обычно опускается<sup>3</sup>.

Другой, не менее авторитетный автор В.Феллер пишет в своем учебнике [8, гл. 5, стр. 121].

"Хотя символ  $P(A|B)$ <sup>4</sup> сам по себе удобен, трудно дать его точное словесное выражение. ... Короче говоря, наши формулы и символы не допускают никакой двусмысленности, но словесные выражения часто недостаточно четки и требуют точного истолкования.

... Рассматривая условные вероятности различных событий при одной и той же частной гипотезе  $B$ , мы приходим к возможности выбрать  $B$  в качестве нового пространства элементарных событий; нужно лишь все вероятности умножить на постоянный множитель  $1/P(B)$ ".

Наконец, в современном учебнике А.Н.Ширяева также имеется аналогичное краткое замечание к определению условных вероятностей [9, стр. 46].

Закljučая, отметим, что еще Колмогоров в основополагающей работе [1] также указывал, что "... при множестве  $B$  условные вероятности (2) образуют поле вероятностей" (гл. 5, §4, комментарий к формулам (8)-(10)). ■

Приведенные ссылки показывают, что ситуация, о которой мы говорили во вводной части, не случайна; поднятый вопрос о легализации термина "условное событие" – это не наш каприз, он висит в воздухе, но

---

<sup>2</sup>В учебнике [4, стр. 13] читаем: "Вероятностное пространство (3) **называется** *условным вероятностным пространством относительно события  $B$* ". Выделение нами слова <называется> жирным шрифтом подчеркивает, что автор учебника Климов повидимому не сам ввел этот термин, а заимствовал его; впрочем, возможно мы ошибаемся в этом, поскольку в предисловии к учебнику автор пишет, что его "... освещение материала может показаться непривычным для специалистов, но новичками (студентами; Б.З.) часто воспринимаются проще".

<sup>3</sup>В последующих изданиях [6,7] учебника Гнеденко (из которых первое – прижизненное) приведенное замечание изъято ?!

<sup>4</sup>У автора вместо  $B$  используется обозначение  $H$  (событие, гипотеза).

(видимо по сложившейся традиции) "стыдливо" обходится стороной <sup>5</sup>. Стыдливо потому, что, как показано выше, термин "условная вероятность" – это, строго говоря, жаргон; это слэнг, закрепившийся потому, что удобнее, короче, чем скрывааемый за ним подлинно строгий термин "вероятность условного события".

Мы призываем побороть эту традицию и "поставить все точки над *i*" – признать важным и (вместо стыдливых замечаний) ввести в учебники следующее уточнение к термину "условная вероятность".

Надо отметить, что термин "условная вероятность" – это краткая замена более строгого полного термина "вероятность **условного события**", т.е. события в **условном вероятностном пространстве**. Именно, для исходного пространства (1) каждое фиксированное событие  $B \in \sigma$  порождает условное вероятностное пространство (3): любому событию  $A \in \sigma$  отвечает условное событие  $A_B$  – оно определяется множеством  $AB$ , погруженным в пространство (3), при этом

$$P_B(A_B) := P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad A \in \sigma, A_B \in \sigma_B \quad . \quad (4)$$

Оба термина – "условная вероятность" и "вероятность условного события" – синонимы, и выбор одного из них определяется удобством изложения материала.

Это уточнение подчеркивает, что строгое определение понятия "условная вероятность" возможно **только** с привлечением понятий "условное вероятностное пространство" и, соответственно, "условное событие".

3. *Случай базового события с нулевой вероятностью.* В ситуации, когда  $P(B) = 0$ , определение условных вероятностей более сложно. Точнее, оно невозможно, если рассматривать событие  $B \in \sigma$  изолированно, необходимо включить его в более широкий контекст – **разбиение** пространства (1); это было показано в [1]. Когда разбиение задано, соответствующая вероятностная мера в пространстве (3) строится с помощью теоремы Радона-Никодима.

---

<sup>5</sup>В 70-х годах после выхода в русском переводе книги Ш.Закса "Теория статистических выводов", М.: Мир, 1975 (редактор – Ю.К.Беляев), Колмогоров поставил перед Отделом теории вероятностей МИАН СССР (руководителем которого он в то время был) задачу совершенствования языка. С этой целью была создана специальная группа, однако до сих пор эта задача не решена.

Выделенное выше наклонным шрифтом уточнение распространяется и на этот случай.

4. *Условная случайная величина.* Случайная величина – это некоторая функция  $\psi$ , определенная на множестве  $\Omega$  вероятностного пространства (1). Соответственно, условная случайная величина  $\psi_B$  – это та же функция, но рассматриваемая не на всем множестве  $\Omega$  элементарных событий, а только на множестве  $B$  вероятностного пространства  $\Pi_B$ .

Как и выше, термины "условное распределение случайной величины" и "распределение условной случайной величины" синонимичны.

5. *Обсуждение.* Одним из важнейших разделов теории вероятностей является описание *процессов*, т.е. систем, развивающихся во времени. В частности, в теории статистических решений на основе байесовского подхода, употребляются термины "априорное" и "апостериорное" распределения. Но в определенных случаях вместо этих терминов гораздо удобнее пользоваться терминами "априорное" и "апостериорное" событие.

В самом деле, например, при построении байесовских апостериорных распределений используется формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_j P(B_j)P(A|B_j) \quad , \quad (5)$$

где семейство множеств  $\{B_j\}$  образует разбиение множества  $\Omega$  вероятностного пространства (1). В терминах событий соответствующая формула имеет вид

$$A = \sum_j B_j \cdot A_{B_j} \quad ; \quad (6)$$

здесь точка означает одновременную реализацию двух событий, первое из которых безусловное (априорное), а второе – условное (апостериорное). Формула (6) очевидна, она не требует никакой теории, а только понимания содержательного смысла обозначений. Важным обстоятельством является то, что формула (6), в отличие от (5), не требует задания вероятностей; если же вероятности в правой части (6) **определены**, то формула (5) вытекает из (6).

Этот пример иллюстрирует преимущества "событийного" языка; на этом языке и был сформулирован принцип инертности, о котором говорилось в Преамбуле.

### *Заключение*

В заметке поставлен злободневный вопрос о **необходимости совершенствования терминологического глоссария теории вероятностей**. Конкретнее, термин "условные вероятности" требует более строгого изложения в учебных курсах, основанного на понятии "условное вероятностное пространство". Показано (на примере п. 5), что использование термина "условное событие" (отвергаемого ортодоксальной школой теории вероятностей), может быть предпочтительнее общепринятого термина "условные вероятности".

## Литература

1. Беленький В.З., Заславский А.А. Основания теории фидуциальных вероятностей: принцип инертности.  
*Экономика и мат. методы*, 2011, вып. 3.
2. Беленький В.З., Заславский А.А. Фидуциальный подход в инвариантной проблеме наилучшего выбора.  
*Экономика и мат. методы*, 2012, вып. 1.
3. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей.  
2-е издание. М.: Наука, 1974.
4. Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика.  
М.: Изд-во МГУ, 1983.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1965.
6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Изд-во МГУ, серия "Классический университетский учебник", 2005.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения», т. 1.  
М.: Мир, 1984 (перевод и редакция Ю.В.Прохорова).
9. Ширяев А.Н. Вероятность-1. МЦНМО, 2007.

**Задача оптимального покрытия плоской области  
небольшим числом одинаковых кругов**

Задача, вынесенная в заголовок, – это фрагмент хорошо известной математической проблемы о покрытиях на плоскости и в пространстве, которой посвящена обширная литература, в т.ч. монографическая, см., например [1,2]. Основным в этой проблеме является вопрос о наиболее плотном покрытии плоскости или некоторой ее области кругами (в пространстве – шарами) одинакового радиуса, а также вопрос о наиболее плотной укладке кругов (шаров). Эти вопросы подробно изучены для случая, когда радиус круга много меньше размера покрываемой области, и, соответственно требуемое число кругов велико. В то же время в практических приложениях, напротив, рассматриваемая ситуация как правило такова, что радиус круга сопоставим с размером области покрытия, и число кругов мало. Поэтому представляет интерес подробнее рассмотреть такие ситуации и построить оптимальные покрытия по крайней мере для простых областей. Этому посвящена настоящая заметка.

Мы будем рассматривать задачу о построении покрытия **выпуклой ограниченной** области на плоскости заданным числом одинаковых кругов (небольшим, не более трех) так, чтобы их радиус был наименьшим. Для простейших фигур – *треугольник, прямоугольник, эллипс* – будут даны явные формулы для расчета оптимального покрытия.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ

Пусть  $G$  – выпуклая ограниченная область (*фигура*) на плоскости  $R^2$ . Система кругов образует покрытие фигуры  $G$ , если каждая точка этой фигуры принадлежит по крайней мере одному из кругов системы. *Радиусом покрытия* назовем радиус наибольшего круга системы. Когда число кругов больше единицы, каждому из них достается "своя" область – множество тех точек из  $G$ , для которых центр данного круга является ближайшим. Два круга, покрывающие соседние области, пересекаются,

образуя лунку (линзу). Хорды таких лунок и "разрезают" всю фигуру на части, каждая из которых и является "своей" для соответствующего центра (многоугольники Вороного).

**Не предполагая заранее, что все круги имеют одинаковый радиус**, переформулируем поставленную во вводной части задачу более строго.

*Задача.* Для данной фигуры  $G$  и данного натурального  $n$  построить покрытие минимального радиуса (обозначаемого  $r^{(n)}$ ), состоящее из  $n$  кругов.

Сформулируем утверждения общего характера, относящиеся к произвольному числу кругов.

**Лемма 1.** Пусть всякое покрытие обладает следующим свойством: если не все круги системы одинаковы, то существует покрытие меньшего радиуса. Тогда при минимальном покрытии все круги одинаковы.

*Доказательство.* Лемма очевидна. ■

Еще одно утверждение, которое интуитивно кажется справедливым, сформулируем как гипотезу.

**Гипотеза 1.** При оптимальном покрытии всякий связный кусок границы области  $G$  (отличный от точки) покрывается только одним кругом. Иначе говоря, никакие два круга не могут иметь общей части вне данной области. ■

На рассматриваемых в статье фигурах эта гипотеза подтверждается, но верна ли она в общем случае, вопрос открыт.

Еще одно общее соображение состоит в следующем. При поиске оптимального покрытия надо выбрать некоторую типовую конфигурацию (вид) покрывающей системы, содержащую свободный параметр (возможно векторный). Если покрытия выбранного типа удовлетворяют условию Леммы 1, то оптимальным в данной конфигурации является покрытие одинаковыми кругами – *условие равновесия*. Если возможна другая (альтернативная) конфигурация, претендующая на оптимальность, то их надо сравнить и выбрать ту, которая дает меньший радиус.

Результаты данной работы выявляют два типа оптимальных конфигураций – когда фигура  $G$  достаточно "округлая", или когда она "вытянута". Для простейших фигур переход от одного типа к другому происходит при некотором *критическом* значении параметра, определяющего

форму фигуры.

*1.1. Покрытие одним кругом.* Даже в этом случае задача покрытия нетривиальна и может быть решена, вообще говоря, только алгоритмически. Общее указание: если область  $G$  является многоугольником с  $m \geq 4$  вершинами, то покрывающая окружность проходит либо через две его наиболее удаленные вершины, либо по крайней мере через три вершины, образующие тупоугольный треугольник. Поэтому решение может быть найдено прямым перебором всех возможных вариантов выбора этих вершин. Всякая выпуклая область может быть аппроксимирована многоугольником с любой точностью, и при современных компьютерах задачу с одним кругом можно считать алгоритмически решенной.

*Примечание.* Для простоты мы говорим (здесь и в дальнейшем) кратко "покрывающая окружность", вместо полного "окружность (граница) покрывающего круга". ■

*1.2. Покрытие двумя кругами.* При оптимальном покрытии двумя кругами точки пересечения покрывающих окружностей находятся на границе фигуры, образуемая ими лунка целиком лежит внутри области и хорда этой лунки разрезает фигуру на две части. Такая картина доказывает следующее утверждение.

**Лемма 2.** Покрытие области двумя кругами оптимально тогда и только тогда когда точки пересечения окружностей находятся на границе и, кроме того, каждый из кругов является оптимальным покрытием (при  $n = 1$ ) для "своей" части области  $G$ . ■

*Примечание.* Эта лемма верна, если оптимальное покрытие понимается в широком смысле (так, как это сформулировано в поставленной задаче) – не требовать обязательного равенства покрывающих кругов. ■

*1.3. Покрытие тремя кругами.* В случае  $n = 3$  оптимальное покрытие фигуры округлого типа реализуется когда все три покрывающих окружности пересекаются в одной общей точке, которая находится внутри – *треугольная* конфигурация.

Если же фигура "вытянутая", то покрывающие круги выстраиваются в цепочку, так что крайние круги (не пересекающиеся друг с другом) покрывают "фланги" фигуры (левый и правый), а средний круг (пересе-

кающийся с каждым из крайних) покрывает ее "сердцевину" – *линейная конфигурация*.

## 2. ПОКРЫТИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

Будем рассматривать треугольник  $ACB$ , основание  $AB$  которого является наименьшей стороной;  $AC$  – наибольшая сторона. Обозначаем углы треугольника:  $\alpha := A$ ,  $\beta := B$ ,  $\gamma := C$  ( $\gamma \leq \alpha \leq \beta$ ); радиус описанного круга обозначается  $R$ , а его диаметр –  $d$ .

Напомним, что всякая хорда в круге связана с его диаметром  $d$  соотношением

$$\text{хорда} = d \cdot \sin(\text{противолежащего угла}) \quad . \quad (1)$$

*2.1. Покрытие одним кругом.* Здесь параметром, определяющим тип покрытия, является максимальный угол  $\beta$  треугольника, а его критическое значение равно  $90^\circ$ . Если треугольник остроугольный ( $\beta \leq 90^\circ$ ), то оптимальной является описанная окружность; если же угол  $\beta$  тупой, то оптимальной является окружность, построенная на противоположной стороне  $AC$  как на диаметре (при этом, вершина  $B$  оказывается не на границе, а внутри круга).

Радиус покрытия

$$r^{(1)} = \begin{cases} R & \beta \leq 90^\circ \\ AC/2 & \beta \geq 90^\circ \end{cases} = R \cdot \begin{cases} 1 & \beta \leq 90^\circ \\ \sin \beta & \beta \geq 90^\circ \end{cases} \quad . \quad (2)$$

*2.2. Два круга.* При  $n = 2$  первый из кругов (нижний) покрывает основание  $AB$  как наименьшую сторону; точки пересечения его окружности с боковыми сторонами  $AC$  и  $BC$  обозначим через  $D$  и  $E$  соответственно; второй (верхний) круг покрывает (оптимальным образом) треугольник  $DCE$ , см. Рис. 1. Здесь также надо рассмотреть отдельно тупоугольный и остроугольный треугольники; начнем с тупоугольного треугольника.

*2.2.1. Тупоугольный треугольник.* Ясно, что первая окружность проходит через вершину  $A$  острого угла. При любом положении точки  $E$

(независимо от точки  $D$ ) диаметр покрытия  $d = 2r$  подчиняется неравенствам

$$d \geq AE \quad , \quad d \geq CE \implies d \geq \max[AE, CE] =: \delta(E) \quad ;$$

следовательно при любом покрытии

$$d \geq \min_{E \in BC} \delta(E) =: \delta \quad . \quad (3)$$

Поскольку при возрастании отрезка  $BE$   $AE$  возрастает, а  $CE$  убывает, то минимум в (3) достигается при равенстве  $AE = CE$ , т.е. когда треугольник  $ACE$  равнобедренный. Таким образом, значение  $\delta$  реализуется на равнобедренном треугольнике и является, согласно (3), оценкой снизу для любого покрытия. Но эта оценка как раз и достигается на равнобедренном треугольнике. В самом деле, построим первый круг на отрезке  $AE$  как на диаметре, тогда угол  $ADE$  прямой (как опирающийся на диаметр), следовательно точка  $D$  совпадает с серединой  $M$  стороны  $AC$ ; поэтому треугольник  $DCE = MCE$  прямоугольный, и описанный около него второй круг имеет своим диаметром сторону  $CE$ , см. Рис. 16. Осталось добавить, что построенные таким образом круги образуют покрытие исходного треугольника  $ABC$ ; это действительно так: поскольку угол  $B$  тупой, его вершина  $B$  находится внутри первого круга.

Итак, радиус оптимального покрытия

$$r^{(2)} = \frac{1}{2}CE = \frac{AC}{4 \cos \gamma} = R \cdot \frac{\sin \beta}{2 \cos \gamma} \quad . \quad (4)$$

В сравнении с покрытием одним кругом коэффициент снижения составит

$$\kappa_{12} = r^{(1)}/r^{(2)} = 2 \cos \gamma \quad ,$$

и поскольку в тупоугольном треугольнике наименьший угол не превосходит  $45^\circ$ , имеет место оценка

$$\kappa_{12} \geq 2 \cos 45^\circ = \sqrt{2} \simeq 1.414 \quad . \quad (5)$$

это означает, что для тупоугольного треугольника переход от одного круга к двум сокращает радиус покрытия не менее чем в 1.414 раз.

2.2.2. **Остроугольный треугольник.** Построение предыдущего пункта не проходит для остроугольного треугольника по единственной причине: вершина острого угла  $B$  будет находиться не внутри, а снаружи первого круга, и поэтому построенная пара кругов не образует покрытия. Это значит, что теперь вершина  $B$  будет лимитирующей: первый круг обязан проходить не только через вершину  $A$  (как это было выше), но и через вершину  $B$ . Следовательно, центр  $O$  нижнего круга должен находиться на срединном перпендикуляре к основанию  $AB$ , см. Рис. 1в.

Чтобы понять как найти оптимальное покрытие, будем постепенно поднимать центр  $O$  от начального положения в средней точке  $P$  стороны  $AB$  вверх по вертикальной оси. В этом процессе радиус  $r$  первого (нижнего) круга возрастает, а верхний треугольник  $DCE$  "сжимается".

*Примечание.* Употребление термина "сжимается" вполне оправдано в силу следующей леммы.

**Лемма 3.** Пусть окружность  $O$  проходит через вершины  $A, B$  треугольника  $ABC$  и пересекает стороны  $AC, BC$  в точках  $D, E$  соответственно. Тогда треугольник  $DEC$  подобен треугольнику  $ABC$ .

*Доказательство.* Четырехугольник  $ADEB$  вписан в круг, поэтому сумма каждой пары его противоположных углов равна  $180^\circ$ ; следовательно, угол  $DEC$  равен углу  $A$ , а угол  $EDC$  – углу  $B$ . ■

Можно сказать, что  $\triangle DCE$  – это "первернутое" подобие треугольника  $ACB$ ; коэффициент подобия  $k$  равен отношению сходственных сторон, например,  $k = DC : BC$ . В процессе подъема центра  $O$  коэффициент  $k$  уменьшается – происходит сжатие верхнего треугольника. ■

В каждом положении движущегося центра  $O$  мы должны сравнить радиус нижнего круга  $r$  с радиусом  $\rho$  оптимального покрытия верхнего треугольника  $DCE$  одним кругом; ввиду подобия,  $\rho = kR$ , где  $R$  – радиус покрытия одним кругом исходного треугольника  $ABC$ , который для остроугольного треугольника есть радиус описанного круга. Это соображение позволяет получить уравнение для искомой величины  $r$ .

Параметризуем положение центра  $O$  углом  $\varphi := \angle OAB$ , тогда имеем (обозначив  $a := AB/2$ )

$$r = a / \cos \varphi, \quad k = \frac{DC}{BC} = \frac{AC - AD}{BC} = \frac{AC - 2r \cos(\alpha - \varphi)}{BC}.$$

Процесс подъема центра должен остановиться в тот (оптимальный) момент, когда начнет выполняться неравенство  $r \geq \rho = kR$ , т.е. условие

$$r \geq \frac{AC - 2r \cos(\alpha - \varphi)}{BC} R \iff \frac{a \cdot BC}{R} \geq AC \cos \varphi - 2a \cos(\alpha - \varphi) \quad .$$

Учитывая соотношение (1), это условие можно записать в терминах углов исходного треугольника:

$$\sin \gamma \sin \alpha \geq \sin \beta \cos \varphi - \sin \gamma \cos(\alpha - \varphi) \quad . \quad (6)$$

Оказывается (вот повезло!), это неравенство разрешается в явном виде; используя формулы тригонометрии, преобразуем (6) последовательно

$$\begin{aligned} \sin \gamma \sin \alpha (1 + \sin \varphi) &\geq (\sin \beta - \cos \alpha \sin \gamma) \cos \varphi \\ \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} &\geq \frac{\sin \beta - \cos \alpha \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} \quad . \end{aligned} \quad (7)$$

Обе части этого неравенства упрощаются:

$$\frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{(\cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2))^2}{\cos^2(\varphi/2) - \sin^2(\varphi/2)} = \frac{(1+t)^2}{1-t^2} = \frac{1+t}{1-t} \quad t := \operatorname{tg}(\varphi/2)$$

$$\sin \beta = \sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \quad ,$$

поэтому (7) приводится к виду

$$\frac{1+t}{1-t} \geq \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} \quad . \quad (8)$$

Т.к.  $t < 1$ , то из (8) получаем

$$t \geq \frac{1 - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \gamma} = \operatorname{tg}(45^\circ - \gamma) \quad ,$$

т.е., окончательно,

$$\varphi/2 \geq 45^\circ - \gamma \quad \sim \quad \varphi \geq 90^\circ - 2\gamma \quad . \quad (9)$$

Теперь возможны две альтернативы.

**A.**  $\gamma \geq 45^\circ$ . В этом случае условие (9) выполняется при  $\varphi = 0$ , центр  $O$  находится в середине стороны  $AB$  (точка  $P$ ), и тогда

$$r = AB/2 = R \sin \gamma \quad ,$$

при этом радиус оптимального покрытия верхнего треугольника **меньше**  $r$  (см. выше примечание к Лемме 2).

**Б.**  $\gamma \leq 45^\circ$ . Условие (9) выполняется как равенство, определяющее угол  $\varphi$ , и тогда

$$r = \frac{AB/2}{\cos \varphi} = \frac{R \sin \gamma}{\sin 2\gamma} = \frac{R}{2 \cos \gamma} .$$

Таким образом,

$$r^{(2)} = R \cdot \begin{cases} \frac{1}{2 \cos \gamma} & \gamma \leq 45^\circ \\ \sin \gamma & \gamma \geq 45^\circ \end{cases} . \quad (10)$$

В обоих случаях выполняется оценка (5), которая, таким образом, справедлива для любого треугольника и **зависит только от наименьшего угла**  $\gamma$ .

**2.3. Три круга.** Как отмечено выше в п. 1.3, здесь возможны конфигурации двух типов – треугольная и линейная.

**2.3.1. Треугольная конфигурация.** Все три круга имеют общую точку пересечения  $P$ .

Если треугольник остроугольный, то точка  $P$ , находится внутри треугольника, и отрезки, соединяющие точку  $P$  с вершинами, являются диаметрами покрывающих кругов. В этом случае равновесным является покрытие, когда  $P$  совпадает с центром описанной окружности, см. Рис. 2а; в самом деле – любое смещение точки  $P$  приводит к увеличению радиуса одного из кругов.

Если же треугольник тупоугольный, то два круга покрывают наибольшую сторону  $AC$  (оптимальным образом, т.е их центры находятся на стороне  $AC$  и окружности касаются друг друга в середине этой стороны – точке  $P$ , см. Рис. 2б). При этом, углы  $PMA$  и  $PNC$  оба прямые (как опирающиеся на диаметры), поэтому в четырехугольнике  $MPNB$  два противоположных угла прямые и, следовательно, он вписывается в круг, который и будет его оптимальным покрытием (третий круг); радиус этого круга, очевидно, меньше, чем у первых двух.

Во всех случаях радиус покрытия

$$r^{(3)} = R/2 , \quad (11)$$

коэффициент снижения  $\kappa_{13} = 2$ .

2.3.2. Линейная конфигурация. Конфигурация имеет форму "снежной бабы", в которой окружность нижнего круга проходит через концы основания  $A, B$ . Радиус равновесия  $r$  в такой конфигурации можно рассчитать аналитически, при этом надо рассмотреть отдельно случаи остроугольного и тупоугольного треугольников.

$\mathbf{A}$  – остроугольный треугольник. На Рис. 2в все три треугольника  $MCN, DCE, ACB$  подобны друг другу в силу Леммы 3. В частности,  $\angle CNM = \angle MDE = \angle EBA = \beta$ , и согласно (1), противолежащие им хорды  $CN, ME, ED$  равны между собой. Следовательно треугольники  $CME$  и  $MED$  оба равнобедренные, поэтому

$$\angle MEC = \angle MCE = \gamma, \quad \angle EAD = \angle EMD \quad .$$

По свойству внешнего угла треугольника

$$\angle EMD = \angle MCE + \angle MEC = 2\gamma, \quad \angle AEB = \angle ACE + \angle EAC = 3\gamma \quad .$$

Теперь получаем равенство

$$AB = 2R \sin \gamma = 2r \sin \angle AEB = 2r \sin 3\gamma \quad .$$

из которого находим

$$r = \frac{\sin \gamma}{\sin 3\gamma} \cdot R = \frac{1}{1 + 2 \cos 2\gamma} \cdot R \quad . \quad (12)$$

Сопоставляя с п. 2.3.1, получаем

$$r^{(3)} = R \cdot \min \left[ 1/2, \frac{1}{1 + 2 \cos 2\gamma} \right] = R \cdot \begin{cases} \frac{1}{1 + 2 \cos 2\gamma} & \gamma \leq 30^\circ \\ 1/2 & \gamma \geq 30^\circ \end{cases} \quad . \quad (13)$$

Таким образом, при малых  $\gamma$  треугольник имеет "втянутый" тип, и оптимальной конфигурацией является "снежная баба"; при больших  $\gamma$  – "овальный" тип, оптимальна центрированная конфигурация; переход от одной к другой происходит при  $\gamma = 30^\circ$ , при этом оптимальны **обе** конфигурации.

*Примечание.* Проведенные выкладки корректны, если точка  $E$  (вершина угла  $AEB = 3\gamma$ ) принадлежит отрезку  $CB$  (т.е. находится выше, а не ниже вершины  $B$ ). Для этого необходимы два условия

$$\angle A = \alpha \geq \angle EAD = 2\gamma \quad , \quad \angle AEB + \angle B \leq \pi \quad \sim \quad 3\gamma + \beta \leq \pi \quad ;$$

с учетом того, что  $\alpha \leq \beta$ , получаем оценку

$$2\gamma \leq \alpha \leq \beta \leq \pi - 3\gamma \quad \sim \quad \gamma \leq \pi/5 = 36^\circ \quad .$$

Верхняя граница в (13) ( $30^\circ$ ) удовлетворяет указанной оценке, так что результат корректен. ■

**Б** – тупоугольный треугольник, Рис. 2г. Линейная конфигурация, показанная на этом рисунке, аналогична Рис. 2в. Отличие в том, что треугольник  $DEC$ , подобный треугольнику  $ABC$ , тупоугольный; его покрытие двумя кругами имеет вид Рис. 1а, и точка  $D$  пересечения нижнего круга со стороной  $AC$  находится **внутри** среднего круга (который пересекает сторону  $AC$  в точке  $P$  не совпадающей с точкой  $D$ ). Угол  $MPE$  прямой (как опирающийся на диаметр  $ME$  среднего круга), поэтому (узенький) треугольник  $DPE$  прямоугольный с острым углом  $PDE$ , равным  $\pi - \beta$ . Теперь переходим к расчету ( $d := 2r$ ).

Имеем:  $\angle PME = 2\gamma$  вписан в средний круг,  $\angle EAD =: \varphi$  вписан в нижний круг; поэтому, соответственно,

$$PE = d \sin \angle PME = d \sin 2\gamma \quad , \quad d \sin \varphi = DE = \frac{PE}{\sin \angle PDE} = \frac{d \sin 2\gamma}{\sin \beta} \quad .$$

Следовательно, угол  $\varphi$  определяется из равенства

$$\sin \varphi = \frac{\sin 2\gamma}{\sin \beta} \tag{14}$$

(этим, собственно, и отличается этот расчет от случая **А**, где  $\varphi = 2\gamma$ ).  
Далее

$$AB = 2R \sin \gamma = 2r \sin \angle AEB = 2r \sin(\gamma + \varphi) \Rightarrow r = R \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \varphi)} \quad ;$$

таким образом, сопоставляя с (11),

$$r^{(3)} = R \cdot \min \left[ 1/2, \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \varphi)} \right] \quad . \tag{15}$$

*Примечания.*

1) В треугольнике  $AME$  сторона  $ME$  больше (как диаметр среднего круга) чем  $AE$  (хорда равного круга), поэтому  $\varphi = \angle MAE > \angle AME = 2\gamma$ ; следовательно  $\angle A > \varphi > 2\gamma$ , и условие  $\alpha + \gamma < \pi/2$  (т.к. угол  $B$  тупой) может выполняться только при  $\gamma < 30^\circ$ . Это означает, что при  $\gamma > 30^\circ$  оптимальной является треугольная конфигурация.

2) Рис. 2г противоречит Гипотезе 1, т.к. отрезок  $PD$  принадлежит двум кругам. Но при сохранении радиуса покрытия можно уменьшить радиус нижнего круга, взяв в качестве его диаметра отрезок  $AE$ ; тогда окружность нового круга пройдет через точку  $P$  (т.к. угол  $APE$  прямой), а точка  $B$  окажется внутри круга, подобно Рис. 1б, Гипотеза 1 будет выполнена. ■

### 3. ПРЯМОУГОЛЬНИК

Стороны прямоугольника обозначим  $h, l$  ( $h \leq l$ ).

*3.1. Покрытие одним кругом.* Решение очевидно – это описанный круг. Диаметр покрытия

$$d^{(1)} = \sqrt{l^2 + h^2} = l \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2} \quad \varepsilon := \frac{h}{l} \quad (16)$$

( $\varepsilon$  – характеристика формы прямоугольника).

*3.2. Два круга.* Решение казалось бы также очевидно: разрезать данный прямоугольник пополам, и каждой половине применить покрытие одним кругом. Эта конфигурация показана на Рис. 3а; оптимальный диаметр:

$$d^{(2)} = \sqrt{(l/2)^2 + h^2} = l \cdot \sqrt{1/4 + \varepsilon^2} \quad . \quad (17)$$

Однако правомерность такой логики требует уточнения. Прежде всего, заметим, что при оптимальном покрытии прямоугольника двумя кругами по крайней мере одна из окружностей проходит через две его вершины – это очевидно; более того, очевидно, что эти вершины принадлежат меньшей стороне (пусть это будет сторона  $AD$ ). Центр  $O$  этой окружности лежит на срединном перпендикуляре к отрезку  $AD$ , т.е. на

средней линии прямоугольника (параллельной большей стороне). Поэтому четырехугольник  $AMND$  на Рис. 3а, а вместе с ним и четырехугольник  $MBCN$ , оба являются прямоугольниками. Диагонали этих четырехугольников суть диаметры покрывающих кругов, и в равновесии они одинаковы, поэтому одинаковы и сами четырехугольники, так что формула (17) действительно верна.

Сравнивая с  $d^{(2)}$  и  $d^{(1)}$ , получаем коэффициент снижения

$$\kappa_{12} := \frac{d^{(1)}}{d^{(2)}} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\sqrt{1/4 + \varepsilon^2}} . \quad (18)$$

Минимальное значение  $\kappa_{12}$  достигается на квадрате ( $\varepsilon = 1$ ) и составляет  $2\sqrt{2/5} \simeq 1.265$ ; таким образом для прямоугольника коэффициент снижения  $\kappa_{12}$  не менее 1.265.

**3.3. Три круга.** Самая простая конфигурация – это разрезать прямоугольник на три равные части и покрыть каждую из них одним кругом; см. Рис. 3б. Равновесный диаметр такой конфигурации:

$$d = \sqrt{(l/3)^2 + h^2} = l \cdot \sqrt{1/9 + \varepsilon^2} . \quad (19)$$

Покажем, что это будет оптимальным покрытием только при определенных соотношениях сторон.

Как и в п. 3.2, одна из окружностей проходит через вершины  $A, D$ , отвечающие меньшей стороне и покрывает прямоугольник  $AMND$ . Два других круга покрывают прямоугольник  $MBCN$ , и оптимальное его покрытие соответствует Рис. 3а, на котором центры кругов находятся на средней линии, параллельной **большой** стороне. Поэтому описанная "линейная" конфигурация оптимальна, если в прямоугольнике  $MBCN$  сторона  $BC = h$  меньшая, т.е. при условии

$$h \leq \frac{2}{3} \cdot l \iff \varepsilon \leq 2/3 . \quad (20)$$

В противном случае в прямоугольнике  $MBCN$  сторона  $MB$  меньшая, и получающаяся тогда конфигурация показана на Рис. 3в; ее равновесный диаметр находится из условия (см. (17))

$$d^2 = MB^2 + (h/2)^2 = (l - AM)^2 + (h/2)^2 = (l - \sqrt{d^2 - h^2})^2 + (h/2)^2 ,$$

из которого находим

$$d = l \cdot \frac{1}{8} \sqrt{16 + 40\varepsilon^2 + 9\varepsilon^4} \quad .$$

Таким образом, окончательно

$$d^{(3)} = l \cdot \begin{cases} \sqrt{1/9 + \varepsilon^2} & \varepsilon \leq 2/3 \\ \frac{1}{8} \sqrt{16 + 40\varepsilon^2 + 9\varepsilon^4} & \varepsilon \geq 2/3 \end{cases} \quad . \quad (21)$$

При  $\varepsilon = 2/3$  прямоугольник  $MBCN$  является квадратом, и обе конфигурации оптимальны.

#### 4. Эллипс

Форму эллипса с полуосями  $a, b$  ( $b \leq a$ ) будем характеризовать отношением его полуосей  $\lambda := b/a \leq 1$ . Центр эллипса поместим в начале координат, большую полуось пустим по оси абсцисс, малую – по оси ординат. Вид оптимальной конфигурации зависит только от  $\lambda$ , поэтому будем считать  $a = 1$ ,  $b = \lambda$ , тогда уравнение эллипса записывается в координатной форме в виде

$$x^2 + \frac{y^2}{\mu} = 1 \quad \mu := \lambda^2 \quad . \quad (22)$$

Радиус покрытия обозначается  $r$ .

*4.1. Покрытие одним кругом.* Решение очевидно: центр описанного круга находится в центре эллипса, радиус круга  $r^{(1)} = 1$ .

*4.2. Два круга.* Решение тоже простое: каждая из окружностей проходит через вершины малой оси и одну из вершин большой оси. Радиус покрытия находится из соотношения

$$(1 - r)^2 + \mu = r^2 \quad \implies \quad r^{(2)} = \frac{1 + \mu}{2} \quad .$$

В случае, когда эллипс имеет равные оси (т.е. является кругом,  $\lambda = 1$ ), будет  $r^{(2)} = 1$ . Это означает, что покрытие круга-фигуры двумя кругами есть двукратное наложение покрывающих кругов, что не имеет смысла (второй круг не дает никакого улучшения  $\kappa_{12} = 1$ ).

4.3. Три круга. Это – наиболее сложный случай, оптимальная конфигурация существенным образом зависит от параметра эллипса  $\lambda$ . Как показывается ниже, в процессе увеличения  $\lambda$  от нуля до единицы (т.е. в процессе "эволюции" эллипса от отрезка до круга) возникают последовательно четыре стадии конфигурации. На всех стадиях выполняется условие равновесия; круги одинаковы, причем конфигурация симметрична относительно оси ординат.

4.3.1. Четыре стадии оптимальной конфигурации, общее описание. На фрагментах а)-г) Рис. 4 показаны "каркасы" оптимальной конфигурации в четырех последовательных стадиях эволюции; отрезки, помеченные поперечным штрихом, суть радиусы кругов. В силу симметрии детально показан только правый фланг. На первых двух стадиях а), б) конфигурация сохраняет линейный тип (на верхнем и нижнем контурах эллипса имеются срединные части); в двух последних стадиях в), г) конфигурация треугольного типа (на нижнем контуре срединная часть отсутствует – он целиком покрывается фланговыми окружностями, проходящими через нижнюю вершину малой оси). На всех фрагментах,  $A, C$  – это точки пересечения окружностей  $O, O_2$  с контуром эллипса, так что  $AC$  – это разрезающий отрезок; точки  $A', C'$  симметричны  $A, C$ .

Проследим эволюцию подробнее, и выявим для каждой стадии характерное для нее *условие натяжения* оптимального покрытия.

На фрагменте а) (первая стадия, отвечающая малым значениям  $\lambda$ ) характерным условием является натяжение фланговой окружности  $O_2$  на вершину большой оси эллипса (это условие можно задать как условие касания окружности  $O_2$  с контуром эллипса в наиболее удаленной – опорной – точке). Это приводит к положению центров всех трех покрывающих кругов на большой оси. При этом отрезок  $AC$  вертикален, четырехугольник  $A'ACC'$  является прямоугольником, а  $OA_2C$  – ромбом, стороны которого суть радиусы кругов. С ростом  $\lambda$  отрезок  $AC$  постепенно увеличивается, сохраняя вертикальное положение, и в тот момент, когда он сравнивается по длине с горизонтальным отрезком  $A'A$ , четырехугольник  $A'ACC'$  становится квадратом (т.е. **ромбом** с прямыми углами), и происходит переход ко второй стадии. Условие  $AC = A'A$  оптимального покрытия сохраняется и на последующих стадиях.

На фрагменте б) (вторая стадия) центр  $O$  среднего круга начинает подниматься вверх по оси ординат, а симметричные центры  $O_1, O_2$  опускаются ниже оси абсцисс, сближаясь друг с другом. Четырехугольник  $A'ACC'$  остается ромбом ("эстафетная палочка", переданная от первой стадии, так что переход б)  $\rightarrow$  в) происходит **непрерывно**). Фланговое условие натяжения – касание контура окружности  $O_2$  с контуром эллипса – остается, только опорная точка  $E$  смещается из вершины большой оси вверх. С ростом  $\lambda$  отрезок  $A'A$  растет (в то время как в первой стадии он сжимался; начинается попятное движение точки  $A$ ), а отрезок  $C'C$  продолжает сокращаться, так что точка  $C$  приближается к нижней вершине малой оси эллипса.

Когда точка  $C$  достигнет нижней вершины, наступает третья стадия – конфигурация приобретает треугольную форму, Рис. 4в. В этой конфигурации нижняя вершина эллипса покрывается фланговыми кругами. Это освобождает срединный круг от обязанности покрывать срединную часть нижнего контура эллипса, он должен обеспечивать покрытие только верхней дуги  $A'A$ ; для этого достаточно поместить центр  $O$  в середину отрезка  $A'A$ .

В течение третьей стадии точка  $C$  фиксируется в нижнем положении;  $A'AC$  – вписанный в эллипс **равносторонний** треугольник; фланговое условие натяжения в опорной точке  $E$  остается. В процессе роста  $\lambda$  условие натяжения постепенно ослабевает, и в какой-то момент отпадает. В этот момент центры фланговых кругов приходят в середины боковых сторон треугольника  $A'AC$ ; наступает последняя, четвертая стадия.

В четвертой стадии (Рис. 4г) фланговое натяжение отсутствует, срединная конфигурация в форме равностороннего треугольника стационарна – такая же, как хорошо известное покрытие круга в форме "трилистника".

Ниже даются аналитические расчеты оптимального покрытия для каждого из фрагментов Рис. 4; порядок рассмотрения фрагментов построен по усложнению расчетов.

4.3.2. Первая стадия (ранний этап эволюции). Для фрагмента а) Рис. 4 расчет прост. Если  $(x, y)$  – координаты точки  $A$ , то выполняется (22) и

соотношения

$$a) \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad b) \quad 2x + r = 1, \quad (23)$$

где  $r$  – радиус кругов. Исключим из (22)  $y$ , а из (23,b)  $r$ ; тогда (23,a) дает квадратное уравнение относительно  $x$

$$(3 + \mu)x^2 - 4x + 1 - \mu = 0 \quad x \in [0, 1/2],$$

один из корней которого (побочный) равен единице, а другой находится в указанном интервале и определяет равновесный радиус:

$$x = \frac{1 - \mu}{3 + \mu} \implies r^{(2)} = \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu}. \quad (24)$$

4.3.3. Четвертая стадия (завершающий этап эволюции). Здесь расчет также несложен. Нетрудно видеть, что вписать в эллипс равносторонний треугольник можно только двумя способами: когда одна из вершин находится либо в конце большой, либо в конце малой оси эллипса. Ясно, что оптимален только второй способ – так, как это показано на Рис. 4г.

Пусть  $(s, t)$  – координаты точки  $A$ . Имеем

$$OA = s, \quad CO = \sqrt{3}s, \quad t = CO - \lambda = \sqrt{3}s - \lambda;$$

подставляя это в (22), получаем

$$s^2 + \frac{1}{\mu}(\sqrt{3}s - \lambda)^2 = 1 \implies r^{(2)} = s = \frac{2\sqrt{3}\lambda}{3 + \mu}. \quad (25)$$

4.3.4. Вторая стадия линейной конфигурации. Фрагмент, показанный на Рис. 4б, трудный с точки зрения расчета. Мы опишем порядок расчета, не доводя сопровождающие его сложные аналитические выкладки до конца.

На Рис. 4б четырехугольник  $ОАО_2С$  (являющийся ромбом со стороной  $r$ ), однозначно определяется положением точек  $A, C$ , которое можно задать какими-либо двумя независимыми переменными, например абсциссой  $s$  точки  $A$  и радиусом покрытия  $r$ . Оптимальные значения этих двух переменных (как функций параметра эллипса  $\lambda$ ) находятся из двух

условий: 1 – условие равновесия  $A'A = AC$ , 2 – условие касания в опорной точке  $E$ , которое математически выражается условием коллинеарности вектора  $\overrightarrow{O_2E}$  вектору градиента в точке  $E$  функции  $f(x, y)$ , стоящей в левой части (22).

4.3.5. Третья стадия. Эта стадия показана на Рис. 4в. Она отличается от второй стадии тем, что точка  $C$  фиксируется в нижней вершине малой оси и покрывается фланговыми кругами, а не средним. Конфигурация задается одной свободной переменной, которая находится из условия касания окружности  $O_2$  с эллипсом в точке  $E$ . Расчетные формулы удобно получить взяв в качестве свободной переменной радиус покрытия  $r$ .

4.3.6. Точки переключения – критические значения параметра  $\lambda$ .

**Первая** точка  $\lambda_1$ . На Рис. 4 точка переключения а)  $\rightarrow$  б) соответствует такому значению параметра, когда на фрагменте б) вертикальный отрезок  $AC$  окажется равным по длине горизонтальному отрезку  $AA'$ . В этом положении координаты  $(x, y)$  точки  $A$  совпадают и, следовательно,  $r = \sqrt{2}x$ . Тогда из (24) получаем уравнение

$$1 + 3\mu = \sqrt{2}(1 - \mu) \Rightarrow m = \mu_1 := \frac{4\sqrt{2} - 5}{7} = 0.094, \lambda_1 = 0.306. \quad (28)$$

**Вторая** точка  $\lambda_2$ . Точка переключения б)  $\rightarrow$  в) специфична тем, что во второй стадии боковые стороны ромба  $OA O_2 C$  в момент переключения вертикальны. Это позволяет, используя расчетные формулы второй стадии, получить уравнение для параметра  $\lambda$ , корнем которого и будет искомое значение  $\lambda_2$ . Вычисление на компьютере <sup>1</sup> дает

$$\mu = 0.274, \lambda_2 = \sqrt{0.274} = 0.523. \quad (29)$$

**Третья** точка  $\lambda_3$ . Эта точка соответствует моменту снятия флангового натяжения. Это произойдет тогда, когда опорная точка касания  $E$ , движущаяся в процессе эволюции вверх-влево, достигнет точки  $A$ . При этом, поскольку радиус-вектор  $\overrightarrow{O_2E} = \overrightarrow{O_2A}$  ортогонален касательной к эллипсу в точке  $A$ , центр  $O_2$  обязан принадлежать отрезку  $AC$ , т.е. находиться в его середине. Поэтому фрагмент в) переходит во фрагмент

<sup>1</sup>Выполнено с помощью программной системы TAYLOR [4].

г), причем вектор  $\overrightarrow{CA}$  ортогонален касательной. Это позволяет получить простое условие для  $\mu$ .

Используя формулы п. 4.3.3, имеем

$$s = \frac{2\sqrt{3}\lambda}{3 + \mu}, \quad t + \lambda = \sqrt{3}s = \frac{6\lambda}{3 + \mu}; \quad (30)$$

в дополнение к этому условию ортогональности дает

$$\overrightarrow{CA} = (s, t + \lambda) \text{ пропорционален } \text{grad} f|_A = 2(s, t/\mu);$$

отсюда

$$t + \lambda = t/\mu \Rightarrow t + \lambda = \frac{\lambda}{1 - \mu}.$$

Сопоставляя это с (30), получаем

$$\frac{1}{1 - \mu} = \frac{6}{3 + \mu} \Rightarrow \mu = 3/7, \quad \lambda = \sqrt{3/7} = 0.655. \quad (31)$$

Итак, в эволюции эллипса от отрезка ( $\lambda = 0$ ) к кругу ( $\lambda = 1$ ) выявлены четыре стадии, разделенные точками переключения  $\lambda_{(1,2,3)}$ . Таким образом, задачу покрытия эллипса кругами в количестве не более трех, можно считать решенной.

## 5. ВЫПУКЛАЯ ФИГУРА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

*5.1. Итеративный алгоритм решения.* В общем случае оптимальное покрытие приходится искать с помощью компьютера. Прежде, чем переходить к поиску, надо задаться некоторой точностью  $\varepsilon$ , так что фигура будет представлена как выпуклая оболочка **конечного** множества точек квадратной  $\varepsilon$ -сетки (отметим, что центры кругов искомого покрытия не обязаны находиться в точках сетки, они могут иметь произвольные координаты). Эвристический итеративный алгоритм построения покрытия основан на простой идее: в качестве начальной конфигурации берется оптимальное покрытие отрезка, соединяющего наиболее удаленные точки фигуры. Затем, итеративно, если полученная конфигурация не покрывает всю фигуру, то она слегка модифицируется (с некоторым малым шагом  $h_k$ , где  $k$  – номер итерации) с учетом наиболее удаленных точек

(конечно, с увеличением радиуса покрытия). Интуитивно ясно, что при необходимых условиях на выбор шагов

$$h_k \rightarrow 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} h_k = \infty$$

процесс будет сходиться к некоторому пределу, который и будет давать оптимальное покрытие.

Подобный алгоритм был описан в работе [3, пп. 6.3, 6.4].

**5.2. Геометрическое приближение.** Пусть на плоскости дана некоторая выпуклая фигура  $F$  площадью  $S$ , и  $\mathcal{G}$  – семейство простейших фигур, рассмотренных выше (треугольники, прямоугольники, эллипсы). Пусть  $G$  – одна из этих фигур (площадью  $\hat{S}$ ), с помощью которой мы собираемся аппроксимировать фигуру  $F$ . Совместим  $G$  с  $F$  таким образом, чтобы площадь  $S_0$  их общей части (т.е. области  $F_0 \subseteq F \cap G$ , покрываемой  $G$ ; эта область также является выпуклой фигурой) была максимальной. *Дефектом* покрытия  $def$  назовем суммарную площадь выступающих частей, т.е. площадь области  $F \cup G \setminus F_0$ ; очевидно  $def = S + \hat{S} - 2S_0$ .

**Гипотеза 3.** Для любой выпуклой фигуры  $F$  можно подобрать приближающую ее простейшую фигуру  $G \in \mathcal{G}$  так, что относительный дефект покрытия  $def/S$  не будет превосходить нескольких процентов ( $\approx 5\%$ ). ■

На практике найти наилучшую приближающую простейшую фигуру  $G$  и способ ее совмещения с данной фигурой  $F$  проще всего методом геометрических проб (на чертеже). Когда такая фигура найдена, можно применить полученные выше расчетные формулы.

#### Литература

1. Роджерс К. Укладки и покрытия. М.: Наука, 1968.
2. Тот Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: ИЛ, 1958.
3. Клеппер Л.Я. Формирование дозовых полей радиоактивными препаратами и аппликаторами. М.: Энергоатомиздат, 1983.
4. [http : //www.cemi.rssi.ru/structure/science\\_divisions/taylor.html](http://www.cemi.rssi.ru/structure/science_divisions/taylor.html)

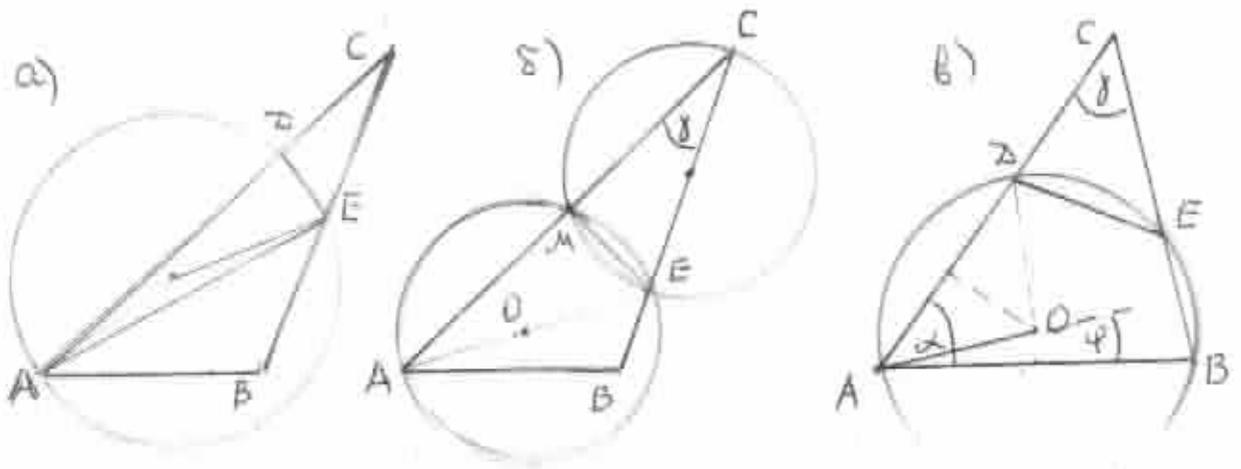


Рис. 1. Покрытие треугольника двумя кругами.

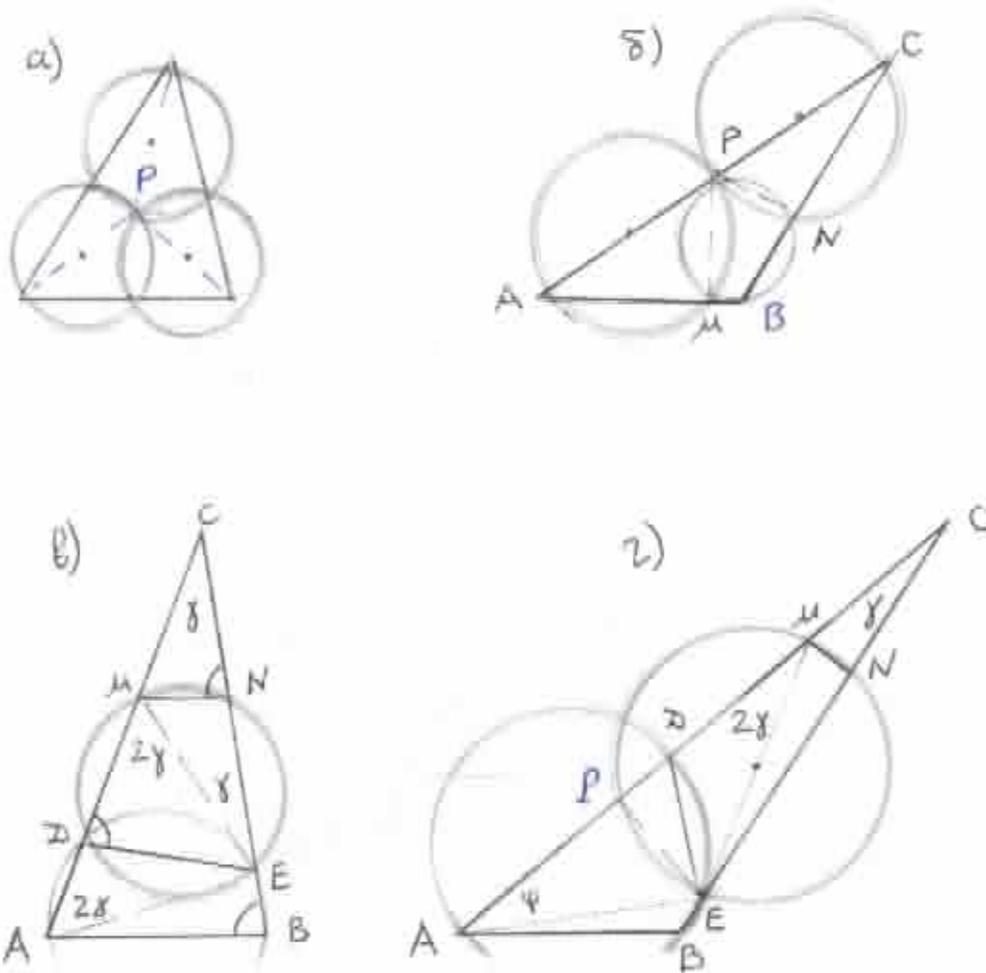


Рис. 2. Покрытие треугольника тремя кругами.

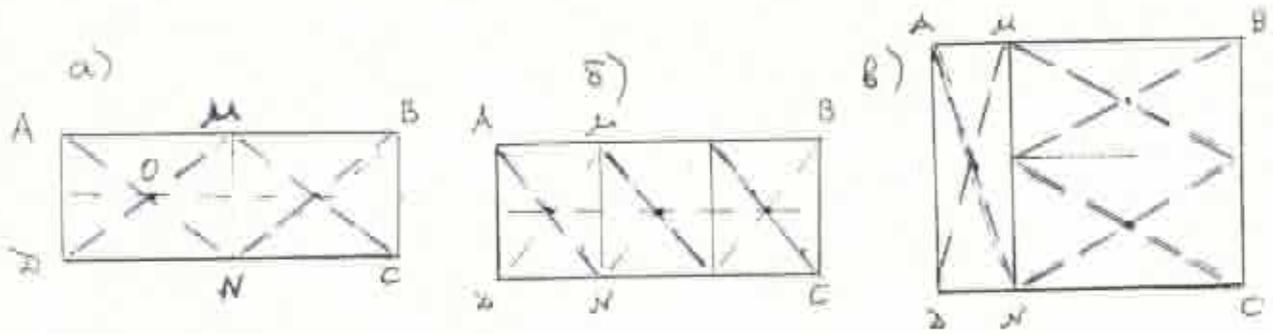


Рис. 3. Покрытие прямоугольника.

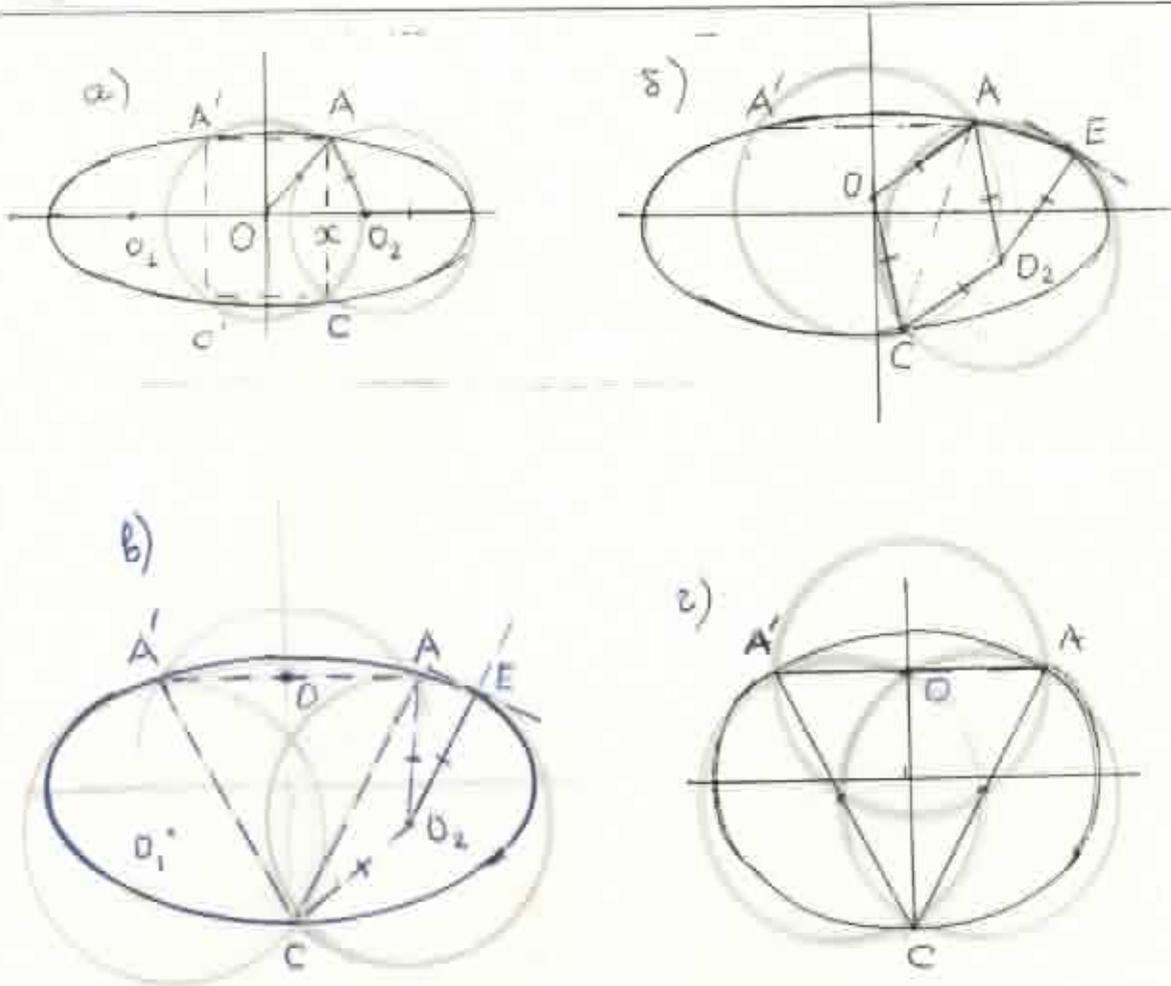


Рис. 4. Покрытие эллипса тремя кругами.

## Лист аннотаций

**Андрюшкевич О.А., Денисова И.М.** Современное состояние национальных инновационных систем. /Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З.Беленького, вып. 9. - М.: ЦЭМИ РАН, 2012, с. 7-30.

Дается сопоставительный анализ современного состояния инновационной политики в различных странах мира, как высокоразвитых, так и развивающихся. Особое внимание уделяется положению в России, отмечены некоторые его негативные моменты, вынесен ряд рекомендаций по его улучшению.

**Трофимова Н.А.** Социальный капитал: анализ факторов, влияющих на его динамику. /Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З.Беленького, вып. 9. - М.: ЦЭМИ РАН, 2012, с. 31-46.

В последние годы в отечественной и зарубежной литературе среди показателей экономической стабильности и роста стали выделять "социальный капитал", характеризующий состояние связей и отношений между экономическими субъектами. В работе на основе концепции П.Бурдье проведены расчеты по анализу факторов, влияющих на динамику социального капитала.

**Смоляк С.А.** Оценка стоимости машин с учетом их ремонтов. /Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З.Беленького, вып. 9. - М.: ЦЭМИ РАН, 2012, с. 47-72.

Метод дисконтированных денежных потоков применен к задаче стоимостной оценки износа подержанных машин и оборудования. Построенная модель позволяет, используя доступную рыночную и техническую информацию, оценивать стоимость таких машин с учетом их возраста, а также проведенных ранее и предстоящих капитальных ремонтов.

**Ефимов Б.А.** Формирование установок индивидов и равновесие по Нэшу бескоалиционных игр: стохастический подход. /Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З.Беленького, вып. 9. - М.: ЦЭМИ РАН, 2012, с. 73-78.

Показано, что гомеостатическое состояние в линейной стохастической модели формирования установок индивидов совпадает с равновесием по Нэшу в бескоалиционной игре с квадратичными функциями выигрыша.

**Аевский В.В., Четвериков В.М.** Одно обобщение дискретной модели доходности "коротких" облигаций. /Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З.Беленького, вып. 9. - М.: ЦЭМИ РАН, 2012, с. 79-102.

Предложена дискретная по времени модель доходности "коротких" облигаций, обобщающая известную модель Васичека и Кокса - Интерсолла - Росса. Представлено положительное ядро ценообразования, приводящее к аффинной модели цен облигаций. Ядро содержит свободный параметр, который можно использовать для верификации модели.

**Белкина Т.А., Норштейн М.В.** Структура оптимального управления инвестициями в динамической модели риска с диффузионным возмущением. /Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З.Беленького, вып. 9. - М.: ЦЭМИ РАН, 2012, с. 103-112.

Рассматривается задача оптимального управления инвестициями в модифицированной классической динамической модели страхования в условиях риска; модификация состоит в том, что в описание процесса риска привносятся диффузионные возмущения. Показано, что структура оптимального управления в модифицированной модели существенно иная, чем в классической.

**Беленький В.З., Гребенников В.Г.** Некоторые методы ранжирования объектов по результатам их парных сравнений. /Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З.Беленького, вып. 9. - М.: ЦЭМИ РАН, 2012, с. 113-128.

Предлагаются различные методы ранжирования конкурирующих объектов (например, проектов) на основе результатов их парных сравнений. Сравнения могут проводиться в качественной либо в количественной форме. Проведена экспериментальная проверка предлагаемых алгоритмов решения возникающих задач.

**Беленький В.З., Заславский А.А.** Что мешает употреблению в языке теории вероятностей термина "условное событие". /Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З.Беленького, вып. 9. - М.: ЦЭМИ РАН, 2012, с. 129-136.

Полемическая заметка, связанная с неприятием указанного термина ортодоксальной школой теории вероятностей. Дается развернутое обоснование "легитимности" и полезности терминов "условное событие" и "условная случайная величина".

**Беленький В.З., Клеппер Л.Я.** Задача оптимального покрытия плоской выпуклой области небольшим числом одинаковых кругов. /Анализ и моделирование экономических процессов. Сборник статей под редакцией В.З.Беленького, вып. 9. - М.: ЦЭМИ РАН, 2012, с. 137-157.

Для выпуклой области на плоскости ставится задача покрытия ее небольшим количеством  $n$  кругов минимального радиуса. При  $n \leq 3$  для простейших областей решение строится аналитически; в общем случае предлагается эвристический алгоритм построения искомого покрытия.

## List of abstracts

**O.A. Andryushkevich, I.M. Denisova.** The current state of national innovation systems

A comparative analysis of the current state in the innovation policy carried out by advanced and developing countries is given. A particular, attention is paid to the situation in Russia; some negative trends are noted, and a number of recommendations are discussed to improve this situation.

**N.A. Trofimova.** Social capital: an analysis of determinants it factors

In recent years, the concept of “social capital” characterizing the connections and relations between the economic subjects is distinguished in the Russian and foreign literature among various indices of economic stability and growth. Based on Bourdieu’s concept, the factors which determinants the social capital are discussed.

**S.A. Smolyak.** Estimation of the cost of used cars after major repairs

The method of discounted cash flows is applied to solve the cost estimation problem for the wear of used cars and equipment. Based on the available market and technical information, the proposed model allows one to estimate the cost of used cars with consideration of their age and the performed and forthcoming major repairs.

**B.A. Efimov.** Formation of individual aims and the Nash equilibrium in noncooperative games: a stochastic approach

It is shown that, in the linear stochastic model for the formation of individual aims, the homeostatic state coincides with the Nash equilibrium in noncooperative game with quadratic gain functions.

**V.V. Aevsky, V.M. Chetverikov.** A generalization of a discrete profitability model for “short” obligations

A time-discrete profitability model for “short” obligations is proposed. This model generalizes the well-known Vasiček and Cox–Ingersoll–Ross model. A positive pricing kernel leading to an affine model of obligation prices is introduced. This kernel contains a free parameter that can be used to verify the model.

**T.A. Belkina, M.V. Norshtein.** Structure of optimal investment strategy in a dynamic model for risks with diffusion disturbances

The optimal investment strategy is considered in a modified classic dynamical insurance model under risks. The modification consists of introducing the diffusion disturbances in the risk description. It is shown that, in the modified model, the structure of optimal investment is essentially different from one of the classic model.

**V.Z. Belenky, V.G. Grebennikov** Some methods for the object ranking on the basis of its pairwise comparisons

A number of methods are proposed to rank competing objects (for example, projects) on the basis of pairwise comparisons. These comparisons can be performed in a qualitative or quantitative form. The algorithms proposed for solving the arising problems are experimentally validated.

**V.Z. Belenky, A.A. Zaslavskii.** What hinders the use of the term “conditional event” in the language of probability theory

The polemic paper associated with the disapproval of the above term by the orthodox school of probability theory. The detail substantiation of “legitimicy” and helpfulness of the terms “conditional event” and “conditional random variable” is given.

**V.Z. Belenky, L.Ya. Klepper.** The problem of optimal covering a plane convex domain by a small number of identical circles

The problem of covering a plane convex domain by a small number  $n$  of minimum radius circles is formulated. For the simplest domains, this problem is solved analytically for  $n \leq 3$ . A heuristic algorithm is discussed for constructing the required covering in the general case.

## ОБ АВТОРАХ

### **Аевский Вадим Викторович**

ведущий специалист по теории риска ОАО "Внешторгбанк"

### **Андрюшкевич Ольга Анатольевна**

кандидат экон. наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ

### **Беленький Виталий Зиновьевич**

доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. лабораторией ЦЭМИ

### **Белкина Татьяна Андреевна**

кандидат физ.-мат. наук, доцент, зав. лабораторией ЦЭМИ

### **Гребенников Валерий Григорьевич**

доктор экон. наук, профессор, зав. лабораторией ЦЭМИ

### **Денисова Ирина Михайловна**

кандидат экон. наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ

### **Ефимов Борис Александрович**

кандидат физ.мат. наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ

### **Заславский Алексей Александрович**

кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ

### **Клеппер Лев Яковлевич**

доктор экон. наук, главный научный сотрудник ЦЭМИ

### **Норштейн Михаил Владимирович**

выпускник МИЭМ 2012 г.

### **Смоляк Сергей Абрамович**

доктор экон. наук, главный научный сотрудник ЦЭМИ

### **Трофимова Наталия Аристарховна**

кандидат экон. наук, доцент, старший научный сотрудник ЦЭМИ

**Четвериков Виктор Михайлович** – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики НИУ ВШЭ/МИЭМ

## ИЗДАНИЯ ЦЭМИ РАН

2012 г.

Препринты. Новая серия

1. **Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю.** Методология оценки человеческого капитала компании (на примере научной организации) / Препринт # WP/2012/291. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 56 с. (Рус.)
2. **Сушко Е.Д.** Мультиагентная модель региона: концепция, конструкция и реализация / Препринт # WP/2012/292. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 54 с. (Рус.)
3. **Бороздин И.И.** Российский выбор экономической модели в условиях глобализма / Препринт # WP/2012/293. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 44 с. (Рус.)
4. **Наринян Н.Е.** Исследование влияния курса валют на эффективность производства промышленных предприятий в России / Препринт # WP/2012/294. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 76 с. (Рус.)
5. **Мартынов Г.В., Малков У.Х., Ермакова И.Г.** Динамическая модель сбалансированности финансовых потоков макроэкономики / Препринт # WP/2012/295. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 70 с. (Рус.)
6. **Дементьев В.Е.** Длинные волны в экономике: инвестиционный аспект / Препринт # WP/2012/297. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 59 с. (Рус.)

## Книги

1. **Стратегическое планирование и развитие предприятий.** В 5 т. / Материалы Тринадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 10–11 апреля 2012 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 960 с.
2. **Стратегическое планирование и развитие предприятий** / Пленарные доклады Двенадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 12–13 апреля 2011 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 84 с.
3. **Теория и практика институциональных преобразований в России** / Сборник научных трудов под ред. Б.А. Ерзнкяна. Вып. 23. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 181 с. (Рус., англ.)
4. **Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов** / Сборник статей под ред. Ю.Н. Гаврильца. Вып. 5. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 115 с. (Рус.)
5. **Анализ и моделирование экономических процессов** / Сборник статей под ред. В.З. Беленького. Вып. 9. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – 163 с. (Рус.)

Central Economics and Mathematics Institute Russian Academy of Sciences  
Publications

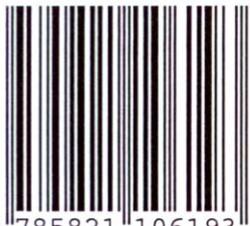
**2012**  
Working papers

1. **Aivazian S.A., Afanasiev M.Yu.** The Methodology of Company's Human Capital Estimation (for Scientific Organizations) / Working paper # WP/2012/291. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2012. – 56 p. (Rus.)
2. **Sushko E.D.** Multiagent Model of the Region: the Concept, Design and Implementation / Working paper # WP/2012/292. – Moscow, CEMI Russian Academy of Science, 2012. – 54 p. (Rus.)
3. **Borozdin I.I.** Russian Choice of Economical Model under Influence of Globalism / Working paper # WP/2008/293. – Moscow, CEMI Academy of Science, 2012. – 44 p. (Rus.)
4. **Narinyan N.E.** Investigation of the Impact of Exchange Rate on the Efficiency of Industrial Enterprises in Russia / Working paper # WP/2008/294. – Moscow, CEMI Academy of Science, 2012. – 76 p. (Rus.)
5. **Martynov G.V., Malkov U.H., Ermakova I.G.** Dynamic Model of Balance of Financial Flows in Russian Macro-economics / Working paper # WP/2012/295. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2012. – 70 p. (Rus.)
6. **Dementiev V.E.** Long Waves in the Economy: Investment Aspect / Working paper # WP/2012/297. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2012. – 59 p. (Rus.)

Books

1. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises.** 5 issues / Materials. Thirteenth Russian Symposium. Moscow, April 10–11, 2012. – Moscow, CEMI RAS, 2011. – 960 p.
2. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises** / Twelve Russian Symposium. Moscow, April 12–13, 2011. Ed. by G.B. Kleiner. – Moscow, CEMI RAS, 2012. – 84 p.
3. **Theory and Practice of Institutional Reforms in Russia** / Collection of scientific works ed. by B.H. Yerznkyan. Issue 23. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2012. – 181 p. (Rus., Eng.)
4. **Mathematical and Computer Modeling of Socio-Economic Processes** / The Collection of Articles ed. by Y.N. Gavrilets. Issue 5. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2012. – 115 p. (Rus.)
5. **Analysis and Modeling of Economic Processes** / The Collection of Articles, ed. V.Z. Belenky. Issue 9. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2012. – 163 p. (Rus.)

ISBN 978-5-8211-0619-3



9 785821 106193

Заказ № 61

Объем 10,2 п.л.  
ЦЭМИ РАН

Тираж 120 экз.