

В.З.Беленький, М.А.Милкова, В.Л.Ушкова

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММНАЯ СИСТЕМА
TAYLOR-3

*Тезисы к презентации
на заседании Ученого совета ЦЭМИ РАН*

Октябрь 2009 г.

Программная система TAYLOR разрабатывалась в ЦЭМИ в течение более 25 лет и завершена к настоящему времени в форме окончательного программного продукта в WINDOWS, готового к массовому распространению (дистрибутив разработан).

Система TAYLOR предоставляет абоненту широкий спектр возможностей использовать в вычислительной практике разложение функций в ряд Тейлора до членов высокого порядка. Ряды Тейлора как удобное и эффективное средство аппроксимации функций, широко применяются в исследовательских и инженерных расчетах во всех областях знаний (кроме чисто гуманитарных); знакомство с рядами Тейлора является обязательным элементом математической подготовки студентов всех специальностей. Это дает основание для повсеместного распространения представляемой системы – в академических и научно-исследовательских институтах, конструкторских бюро и, что не менее важно – в ВУЗах.

Разработки компьютерных программ, использующих ряды Тейлора, начались сразу с появлением первых электронно-вычислительных машин и продолжают по настоящее время. С появлением трансляторов алгоритмических языков широкое распространение получили методы символьной обработки формул, в частности, *символьного дифференцирования*. К настоящему времени на этой основе создан ряд пакетов, позволяющих работать с рядами Тейлора, например пакеты MATHEMATICA, MATLAB, MAPLE, REDUCE. Однако возможности символьного дифференцирования принципиально ограничены громоздкостью возникающих формул, и, как следствие, малой эффективностью таких программ.

В отличие от этих методов, базовые процедуры системы TAYLOR построены непосредственно на основе формул дифференциального исчисления с помощью авторских **рекуррентных** алгоритмов, совокупность которых образует компьютерную "Алгебру дифференцирования"; все алгоритмы работают с исходными формулами, никак не преобразуя их. Это, во-первых, увеличивает скорость работы, и, во-вторых, снимает ограничения на порядок разложения n . Ввиду этого, TAYLOR является **уникальной** программной системой, возможности и эффективность которой при работе с рядами Тейлора намного превосходят другие программные пакеты (по скорости работы – в десятки раз, это проверено экспериментально).

Система **TAYLOR-3** имплементирована в среде DELPHI-PASCAL. Важно, что доступ к ее процедурам организован в стандарте *динамически загружаемой библиотеки* (Dynamic Link Library, DLL); это дает возможность использовать **TAYLOR-3** в **различных языках** программирования (не обязательно в PASCALe).

Презентация охватывает **два программных продукта**: DLL-библиотеку и *интерактивную версию* системы **TAYLOR-3**. Интерактивная версия **будет продемонстрирована в действии на заседании Совета**; ее дистрибутив тоже разработан, в порядке демонстрации он может быть установлен на NOTEBOOK одного из присутствующих в зале. **TAYLOR-3** снабжен диагностической программой обнаружения ошибок и выдачи соответствующих сообщений.

Интерактивная версия предназначена для ознакомления научной общественности с новыми, недоступными ранее, вычислительными средствами. Она может служить и как **вспомогательный** вычислительный инструмент в научно-исследовательских и инженерных разработках. Было бы целесообразно использовать интерактивную версию в учебном процессе математической подготовки студентов.

В настоящее время идет работа по созданию DLL-библиотеки *главной* версии **TAYLOR-3**, более широкой по своим возможностям; ее важнейшее преимущество в том, что в формулах допускается использование внешних параметров (это позволяет строить циклы!). Главная версия может служить **основным** инструментом в серьезной вычислительной работе.

1. ПРОСПЕКТ СИСТЕМЫ **TAYLOR-3**

Комплекс программ системы **TAYLOR-3** включает процедуры четырех уровней. Процедуры нулевого, базового, уровня являются фундаментом всей системы – они получают коэффициенты разложения функций в ряд Тейлора. Надстройка над фундаментом – это прикладные пакеты трех уровней (в зависимости от сложности), предназначенные для решения наиболее типичных задач вычислительной математики; все процедуры этих пакетов основаны на базовых алгоритмах и, в принципе, **каждый пакет может пополняться неограниченно**.

Базовые процедуры получения полиномов Тейлора

На основе Алгебры дифференцирования базовые процедуры получают коэффициенты c_k полинома Тейлора функции $y(x)$:

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k \quad c_k := \frac{1}{k!} \cdot y^{(k)}(x_0) \quad ; \quad (1)$$

на входе задаются функция $y(x)$, порядок полинома n и точка разложения x_0 . В меню **TAYLOR-3** имеется 10 способов задания функции $y(x)$; во всех случаях необходимые функции вводятся **в формульном виде** (в стандарте языка PASCAL).

1. *Явная функция.* Задается явная формула функции $y = f(x)$.

2. *Обратная функция.* Для данной функции $g(y)$ и начального значения y_0 вычисляется точка $x_0 := g(y_0)$ и строится полином (1) функции $y = f(x)$, обратной к функции $x = g(y)$.

3. *Блочная явная функция.* Если формула явной функции имеет сложный вид, то можно выделить в ней характерные блоки простого вида $u_1(x), \dots, u_m(x)$ и представить явную функцию в форме $y = F(x, u_1, \dots, u_m)$; в этом случае на входе задаются формулы блочных функций и синтезирующей функции F .

4. *Обратная к блочной функции.* То же, что в п. 2, только функция $g(y)$ задается, аналогично п. 3, в блочной форме: $g(y) = G(y, u_1, \dots, u_m)$.

5. *Неявная функция.* Функция $y(x)$ определяется условием связи $F(x, y(x)) \equiv F(x_0, y_0)$; функция связи F и начальные значения (x_0, y_0) задаются.

6. *Сложная неявная функция.* То же, что в п. 5, только функция связи задается в форме блочной функции $F(x, y, u_1, \dots, u_m)$, где каждая из блочных функций может зависеть не только от x , но и от y .

7. *Параметрическая функция.* Функция $y(x)$ определяется соотношениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$; функции f_1, f_2 и начальная точка t_0 задаются.

8. *ОДУ первого порядка.* Функция $y(x)$ определяется с помощью обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = G(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad ;$$

задаются функция G и начальные значения (x_0, y_0) . Разложение строится в начальной точке.

9. *ОДУ высокого порядка.* Функция $y(x)$ определяется дифференциальным уравнением высокого порядка

$$y^{(m)} = G[x, y, y', \dots, y^{(m-1)}] \quad ;$$

задаются порядок уравнения m и начальные данные.

10. *Сингулярное ОДУ.* Функция $y(x)$ определяется сингулярным дифференциальным уравнением

$$xy^{(m)} = G[x, y, y', \dots, y^{(m-1)}] \quad x_0 = 0$$

с нулевым коэффициентом в начальной точке при старшей производной.

Кроме того, имеется одна процедура разложения **векторной** функции.

11. *Система ОДУ.* Процедура получает разложение вектор-функции $\mathbf{y}(x)$, определяемой системой дифференциальных уравнений в m -мерном пространстве

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{G}(x, \mathbf{y}) \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad (\mathbf{y}, \mathbf{G} \in R^m) \quad ;$$

разложение строится для всех компонент вектора $\mathbf{y}$ в начальной точке x_0 .

Пакет процедур первого уровня

В этот пакет включены задачи, процедуры решения которых не требуют выхода в многомерное пространство (*одномерные задачи*).

1. Нахождение корня явной функции: решение уравнения $f(x) = 0$
2. Корень производной (нахождение точки экстремума): $f'(x) = 0$
3. Корень блочной функции: $F[x, u_1(x), \dots, u_m(x)] = 0$
4. Вычисление определенного интеграла
5. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка

Пакет процедур второго уровня

Пакет включает программы, требующие выхода в многомерное пространство (*многомерные задачи*).

1. Решение системы двух уравнений
2. Решение задачи Коши для ОДУ высокого порядка
3. Решение задачи Коши для системы ОДУ

Пакет процедур третьего уровня

Сюда включаются *специальные задачи*; в версии **TAYLOR-3** их две.

1. Разложение в ряд Тейлора решения уравнения Беллмана в окрестности стационарного состояния
2. Вычисление интеграла от быстросциллирующей функции

2. КРАТКАЯ ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА О СОЗДАНИИ **TAYLOR-3**

Компьютерная "Алгебра дифференцирования" (АД) была разработана **В.З.Беленьким** и опубликована в форме препринта ЦЭМИ в 1983 году [1]. Препринт, сопровождаемый "Информационным письмом" (за подписью зам. директора ЦЭМИ Э.Б.Ершова) был разослан во многие научные и образовательные центры; в 2003 году этот препринт был переиздан репринтным способом, см. [2]. Все алгоритмы АД были реализованы в языке программирования АЛГОЛ-68 при участии **Е.С.Бирюковой** и консультациях **М.Р.Левинсона**.

В конце 80-х годов была реализована первая версия системы TAYLOR в языке BASIC при участии **Т.П.Австрийской**. Соответствующее "Информационное сообщение" (за подписью директора ЦЭМИ В.Л.Макарова) было разослано по тем же адресам, как и препринт (список адресов приведен в [2]). В 1987 году доклад-сообщение был сделан на I Международном конгрессе по прикладной математике в Париже [3], в 1989 году сообщение было опубликовано в журнале "Кибернетика", см. [4].

В 90-е годы при участии **О.А.Васильевой** и **А.Б.Кукаркина** была разработана вторая версия системы TAYLOR и проведены вычислительные эксперименты, подтвердившие эффективность алгоритмов АД (см.[5]).

После этого О.А.Васильева имплементировала версию-2 в языке PASCAL с разработанным ею интерфейсом; в этой версии была реализована идея **В.А.Булавского** о возможности работы с системами уравнений.

Представляемая настоящая версия **TAYLOR-3** разработана В.З.Беленьким совместно с М.А.Милковой [6]; в 2008/09 гг. она имплементирована М.А.Милковой в среде DELPHI при консультациях **В.Л.Ушковой**.

ПУБЛИКАЦИИ

1. Беленький В.З. Базовые алгоритмы алгебры дифференцирования для ЭВМ. – М.: ЦЭМИ АН СССР, 1983 (препринт).
2. Беленький В.З. Базовые алгоритмы алгебры дифференцирования для ЭВМ. Репринтное переиздание – М.: ЦЭМИ РАН, 2003.
3. Беленький В.З., Австрийская Т.П. Программная реализация алгебры дифференцирования для ЭВМ. // Доклад на I Международном конгрессе по прикладной математике. Париж, 1987.
4. Беленький В.З., Австрийская Т.П. Сообщение о программной системе "Алгебра дифференцирования TAYLOR". *Кибернетика*, 1989, № 3.
5. Беленький В.З., Васильева О.А., Кукаркин А.Б. Программный модуль "Алгебра дифференцирования TAYLOR": результаты численных экспериментов, сообщение о версии 2.1. *Кибернетика и системный анализ*, 1997, № 3.
6. Борисова (Милкова) М.А. Применение Алгебры дифференцирования к исследованию решения уравнения Беллмана. // Сб. "Анализ и моделирование экономических процессов", вып 5. – М.: ЦЭМИ РАН, 2008.